



УДК 53.072:519.622.1

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

И. М. Бапиев магистрант, **А. М. Бисенгалиева**, магистрант

Западно-Казахстанский аграрно-технический университет имени Жангир хана.

Ғылымның негізгі мақсаты: белгілі құбылыстарды түсіндіру және белгісіз құбылыстарды алдын-ала болжауға болатын зерттейтін объектінің теориялық моделін құрастыру. Математикалық модельдерді зерттеудің белгілі әдістерін аналитикалық және сандық топтарға бөлуге болады. Математикалық модельді зерттеудің сандық әдістері зерттелетін объектінің модельдейтін компьютерлік бағдарламаны жасауды талап етеді.

Основная задача науки - построение теоретической модели изучаемого объекта, которая бы объясняла известные и предсказывала неизвестные явления. Все существующие способы исследования математической модели можно разделить на две группы: аналитические и численные. Численные методы исследования математической модели предполагают создание компьютерной программы, моделирующей изучаемое явление.

The main objective of science - are construction of theoretical model of object, which would explain the known and predict unknown phenomena. All existing methods of investigation of mathematical models can be divided into two groups: analytical and numerical. Numerical methods for study of mathematical models suggest the creation of computer program simulating the studied phenomenon.

Решение современных задач вычислительной физики требует проведения огромного количества вычислений, что стало возможным лишь после появления электронно-вычислительных машин, способных выполнять миллионы операций в секунду. Данные вычисления производятся автоматически, в соответствии с программой и не требуют вмешательства человека. Если ЭВМ относится к технической базе проведения вычислительного эксперимента, то ее теоретическую основу составляют прикладная математика, численные методы решения систем уравнений.

История развития численных методов восходит к фундаментальным работам Исаака Ньютона, который еще в 17 веке предложил использовать численные методы для приближенного решения алгебраических уравнений. Леонард Эйлер разработал метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Из современных ученых весомый вклад в развитие компьютерного моделирования сделал академик А.А.Самарский, основоположник методологии вычислительного эксперимента. Именно им была предложена знаменитая триада "модель - алгоритм - программа" и разработана технология компьютерного моделирования, успешно используемая для изучения физических явлений [1].

Производная функции $y=f(x)$ - это предел отношения приращения функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ к приращению аргумента Δx в случае, когда приращение аргумента стремится к 0:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

При этом дифференциал dx – бесконечно малое приращение аргумента, а dy – соответствующая ему линейная часть приращения функции. Производная характеризует быстроту изменения функции и крутизну графика в данной точке x . Она равна тангенсу угла между касательной и положительным направлением оси абсцисс. Частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}$

функции многих переменных $f(x_1, \dots, x_n)$ по переменной x_i в точке $f(x_1, \dots, x_n)$ есть предел приращения функции $f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)$ к приращению аргумента Δx_i при фиксированных значениях остальных независимых переменных.

Для численного дифференцирования используется метод сеток: области непрерывного изменения аргументов функции $y=f(x_1, \dots, x_n, \tau)$ заменяют конечным множеством узлов, образующих одномерную или многомерную пространственно-временную сетку. От функции непрерывного аргумента переходят к функции дискретного аргумента, приближенно вычисляют ее значения на различных временных слоях, находят производные и интегралы. При этом бесконечно малые приращения функции $y=f(x_1, \dots, x_n, \tau)$ и приращения ее аргументов заменяются малыми, но конечными разностями.

Пусть задана функция $y=y(x)$. Разобьем интервал от a до b на элементарные отрезки длиной $h=\Delta x$, получив конечное множество узлов сетки $x_i=a+i\Delta x$, где $i=1, 2, \dots, N$, а N – число узлов. При этом мы переходим от непрерывной области Ω к сетке $\Omega_{\Delta x}$, от функции непрерывного аргумента к функции дискретного аргумента $y_i=y(x_i)$. Запишем для нее ряд Тейлора:

$$y(x) = y(x_i) + y'_i \frac{(x - x_i)}{1!} + y''_i \frac{(x - x_i)^2}{2!} + \dots + y_i^{(k)} \frac{(x - x_i)^k}{k!},$$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i) \frac{h}{1!} + y''(x_i) \frac{h^2}{2!} + \dots + y^{(k)}(x_i) \frac{h^k}{k!},$$

где $h=\Delta x=x-x_i$. Ограничиваясь первыми двумя слагаемыми в правой части, получаем приближенное равенство: $y(x_{i+1})=y(x_i)+y'(x_i)\Delta x$. Оно же следует из определения производной:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}, \quad y_{i+1} = y_i + y'(x_i) \Delta x.$$

Левая, правая и центральная разностные производные первого порядка в точке с координатой x_i соответственно равны:

$$y'(x_i)_- = \frac{y(x_i) - y(x_{i-1}))}{\Delta x}, \quad y'(x_i)_+ = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{\Delta x}, \quad y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2\Delta x}$$

Для второй производной получим:

$$y''(x_i) = \frac{y'(x_{i+1}) - y'(x_i)}{\Delta x} = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{\Delta x^2} - \frac{y(x_i) - y(x_{i-1}))}{\Delta x^2},$$

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{\Delta x^2}.$$

Чем меньше шаг сетки Δx , тем выше точность найденных производных [1, 2].

Интеграл – сумма бесконечно большого числа бесконечно малых. Он численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком интегрируемой функции $y=f(x)$ и пределами интегрирования a и b . Эту криволинейную трапецию разобьем на N прямоугольных полосок шириной $\Delta x=h=(b-a)/N$, длина каждой из которых равна $y_i=y(a+i\Delta x)$. Элементарная площадь полоски $\Delta S=y(x_i)\Delta x$. Искомая площадь S равна сумме:

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N y(x_i) \Delta x = \int_a^b y(x) dx.$$

Для численного нахождения интеграла достаточно определить сумму:

$$S = \sum_{i=1}^N y(x_i) \Delta x.$$

Чем меньше шаг $h=\Delta x$ и больше N , тем точнее найденное значение интеграла. Этот метод называется методом прямоугольников.

Более точный метод трапеций заключается в том, что каждая i -ая полоска заменяется трапецией высотой $h=\Delta x$ с длинами оснований $y_i=y(a+i\Delta x)$ и $y_{i+1}=y(a+(i+1)\Delta x)$, поэтому ее площадь равна $\Delta S_i=(y_i+y_{i+1})\Delta x/2$. Интеграл равен сумме элементарных площадей этих трапецевидных полосок:

$$S = \sum_{i=1}^N \frac{y(x_i) + y(x_{i+1})}{2} \Delta x.$$

Метод Монте-Карло [3] нахождения площади криволинейной трапеции под кривой $y=y(x)$ состоит в следующем. Представим себе прямоугольник, ограниченный пределами интегрирования a и b , осью Ox и горизонталью $y=c$, внутри которого находится эта криволинейная трапеция. Площадь прямоугольника равна $(b-a)c$. Задавая случайным образом координаты (x_i, y_i) , поместим внутрь прямоугольника N точек. Подсчитаем число n точек, оказавшихся внутри криволинейной трапеции, то есть удовлетворяющих условию $y_i \leq y(x_i)$. Площадь криволинейной трапеции будет во столько раз меньше площади выбранного прямоугольника, во сколько раз n меньше N . Поэтому при $N \rightarrow \infty$ дробь $n(b-a)c/N$ стремится к искомому интегралу:

$$S = \int_a^b y(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n(b-a)c}{N}.$$

Многие физические задачи сводятся к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка: $\dot{x}(\tau) - f(x(\tau), \tau) = 0$. Оно решается путем приведения к конечно-разностному уравнению:

$$\frac{x^{t+1} - x^t}{\Delta \tau} = f(x^t, t), \quad x^{t+1} = x^t + f(x^t, t) \Delta \tau$$

Диффуравнение второго порядка $a\ddot{x}(\tau) + b\dot{x}(\tau) + kx(\tau) - f(t) = 0$ приводится к системе из двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x}(\tau) - v(\tau) = 0, \quad a\dot{v}(\tau) + bv(\tau) + kx(\tau) - f(\tau) = 0.$$

Линейным дифференциальным уравнением с частными производными называются соотношения вида:

$$a_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dots + b_{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + b_{13} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \dots + c_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \dots + cf + \varphi(x, y, \dots) = 0$$

В случае, когда коэффициенты $a_{11}, a_{22}, \dots, b_{12}, b_{13}, \dots, c_1, c_2, \dots$ зависят от аргументов $x, y, \dots$ или значений функции $f(x, y, z, \dots)$, уравнение является нелинейным. Если $\varphi(x, y, z, \dots) = 0$, то уравнение называют однородным.

1. К уравнениям гиперболического типа относятся уравнения колебаний упругой одномерной (струны), двумерной (мембраны) и трехмерной среды:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} + \beta \frac{\partial \xi}{\partial \tau} - F(x, \tau),$$

Телеграфные уравнения:

$$\frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{R} u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0.$$

Граничные условия для струны (мембраны): 1) задан режим колебания одной или нескольких точек струны: $\xi(0, \tau) = \mu(\tau)$; 2) задана скорость одной или нескольких точек:

$$\frac{d\xi(0, \tau)}{d\tau} = v(\tau); \quad 3) \text{ задана сила, действующая на одну или несколько точек } \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} = F(\tau).$$

2. Примеры уравнений параболического типа: уравнение теплопроводности (диффузии, вязкости):

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + q(x, y, \tau).$$

3. К уравнениям эллиптического типа относятся уравнение для потенциала стационарного электрического поля:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = -\rho(x, y),$$

уравнение, описывающее стационарное распределение температуры неравномерно нагретой пластины

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0$$

уравнение, описывающее стационарное распределение температуры неравномерно нагретой пластины

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Многие физические ситуации сводятся к задаче Дирихле [4]: требуется решить дифференциальное уравнение в частных производных в замкнутой области Ω при известном распределении искомой функции на границе области $\varphi(\Omega_0)$. Рассмотрим нестационарную задачу, состоящую в решении уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q(x, y)}{c\rho}.$$

Введем сетку $\Omega_{\Delta x, \Delta y, \Delta \tau}$ и перейдем к конечным разностям:

$$\frac{T_{i,j}^{t+1} - T_{i,j}^t}{\Delta \tau} = a \frac{T_{i-1,j}^t - 2T_{i,j}^t + T_{i+1,j}^t}{\Delta x^2} + b \frac{T_{i,j-1}^t - 2T_{i,j}^t + T_{i,j+1}^t}{\Delta y^2} + \frac{q_{i,j}}{c\rho},$$

$$T_{i,j}^{t+1} = T_{i,j}^t + \left(a \frac{T_{i-1,j}^t - 2T_{i,j}^t + T_{i+1,j}^t}{\Delta x^2} + b \frac{T_{i,j-1}^t - 2T_{i,j}^t + T_{i,j+1}^t}{\Delta y^2} + \frac{q_{i,j}}{c\rho} \right) \Delta \tau$$

Зная значения функции на временном слое $T_{i,j}^t$, можно рассчитать ее значения t на следующем временном слое $t+1$.

В качестве примера стационарной задачи проанализируем решение уравнения Пуассона:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = f(x, y).$$

Запишем его в конечных разностях:

$$\frac{\varphi_{i-1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\varphi_{i,j-1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j+1}}{\Delta y^2} = f(x_i, y_i), \Delta x = \Delta y = h.$$

$$\text{Отсюда: } \varphi_{i,j} = \frac{(\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} - f(x_i, y_j)h^2)}{4}.$$

Для решения задачи используется метод последовательных приближений [1]: во всех внутренних узлах сетки задаются произвольные исходные значения искомой функции $\varphi_0(x_i, y_j)$ (нулевое приближение); значения функции во внешних узлах должны соответствовать граничным условиям. Осуществляется первая итерация, в ходе которой перебираются все внутренние узлы сетки и, исходя из начальных значений, определяют новые уточненные значения функции $\varphi_1(x_i, y_j)$. Затем осуществляется вторая, третья, ... и т.д. итерации, причем результаты k -ой итерации используются в качестве исходных для $(k+1)$ -ой итерации.

Как показали исследования [5] полученные дифференциальные уравнения вместе с дополнительными условиями, которые, как правило, задаются в виде начальных и граничных условий, позволяют получить сведения о происходящем явлении. Изучение математической модели численными методами позволяет не только получить качественные характеристики

физических явлений и рассчитать с заданной степенью точности ход реального процесса, но и дает возможность проникнуть в суть физических явлений, а иногда предсказать и новые физические эффекты. Бывает, что сама природа физического явления подсказывает и подходы, и методы математического исследования. Критерием правильности выбора математической модели является практика, сопоставление данных математического исследования с экспериментальными данными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Майер, Р. В. Компьютерное моделирование физических явлений: Монография / Р. В. Майер. – Глазов : ГГПИ, 2009. –112 с.
2. Ильина, В. А. Численные методы для физиков-теоретиков. II. / В. А. Ильин, П. К. Силаев. - Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. -118 с.
3. Соболев, И. М. численные методы Монте- Карло / И. М. Соболев. – М : Наука, 1973.
4. Самарский, А. А. Задачи и упражнения по численным методам: Учеб. пособие. / А. А. Самарский, П. Н. Вабишевич, Е. А. Самарская - М. : Эдиторал УРСС, 2000. -208 с
5. Бердибеков, А. Б. Роль теории дифференциальных уравнений в современной математике и её приложениях / А. Б. Бердибеков // Вестник КАСУ. – 2008. - №1.