

МАТРИЦАНЫҢ ЭКОНОМИКАДА ҚОЛДАНЫЛУЫ

А. Р. Савельева, М. К. Нургазинова, Ф. А. Берниязова

Жәңгір хан атындағы Батыс Қазақстан аграрлық-техникалық университеті

Экономикалық есептерді математикалық тілге аударатын, сол есептерді шешу жолында зерттеушілер математикадағы алуан түрлі әдістерді, жабдықтарды пайдаланады және қолданады. Қарапайым екі секторлық макроэкономикалық модельде матрицалардың қолданылуын қарастырайық.

При переводе экономических задач на язык математики, при решении этих задач исследователи в математике используют и применяют различные методы и оборудование. Рассмотрим использование матрицы в простейшей двухсекторной макроэкономической модели.

Translating economic tasks into mathematic language, solving these tasks, the scientist use different methods and techniques. The usage of matrix in simple double sector microeconomical mode is considered.

Алғашқы көз қарасқа математика және экономика бір-бірінен алшақты ғылымдар, біреуінің тәжірибелілігі, екіншісінің абстракциялығы. Математика және экономика саласындағы ғалымдар, осы екі ғылымның бір-бірімен байланыстарын, яғни экономикалық үрдістерді, объектерді және құбылыстарды талдауда математикалық әдістердің маңыздылығына айырықша көңіл бөледі.

Математикалық аппараттарды, нарықтың проблемаларын шешуде, алғашқылардың бірі болып атақты зерттеушілер Антуан Курно (1801-1877) және Альфред Маршалл (1842-1924) ғалымдары қолданды [1].

Қазіргі кезде математиканы – математикалық модельдердің ғылымы деп атайды.

Экономикалық есептерді математикалық тілге аударатын, сол есептерді шешу жолында зерттеушілер математикадағы алуан түрлі әдістерді, жабдықтарды пайдаланады және қолданады. Экономикалық талдаулар жүргізгенде, сандық әдістерді қолдана отырып, оның нәтижесі болжамдарды растауға немесе дұрыс емес екенін дәлелдеуге, экономикалық объектілердің жұмыс істеуінің оптималды жоспарын құру немесе болжамдау және тағы басқа көптеген мәселелерді шешуге қолданылады.

Қарапайым екі секторлық макроэкономикалық модельде матрицалардың қолданылуын қарастырайық. Мысалы, барлық ұлттық экономиканы екі секторға бөліп, өндіруші және тұтынушы деп атаймыз. Өндірушілер деп белгілегеніміз, олар белсенді экономикалық іс әрекетпен айналысып жатырған тұтас өндіріс салалары, ірі кәсіпорындар, алуан түрлі фирмалар, яғни барлық өнім өндіретіндер және қызмет көрсететін тұлғалар. Өндірушілер өз жұмыстарында келесі ресурстарды қолданады: жер, капитал, еңбек және т.б. Аталған ресурстардың барлығы өндірістік факторларға жатады және олар тұтынушылардың жеке меншігінде болып табылады. Осы ресурстарды пайдалану үшін, өндірушінің тұтынушыларға төлеуіне тура келеді. Осы төлемдердің жиынтығы, ұлттық табыс деп есептеледі.

Тұтынушылардың алатын ақшалары, яғни олардың табыстарын Y екі бөлікке бөлуге болады: тауарларды және қызметтерді сатып алу немесе тұтыну C деп атаймыз және тұтынушылардың жинақтары S [2].

Өндірушілерге екі жақтан ақшалай ағым құйылады: инвестициялар I және тұтынушылардың шығындары C . Бір ақшалай ағым Y кері шығады, ол тұтынушылардың табыстары. Егер экономикада тепе-теңдік болған жағдайда, келесі теңдік шығу керек: $S = I$.

Яғни, барлық жинақтар инвестицияланады, одан шығатын теңдік: $Y = C + I$

Яғни, өндірушіден қаншалықты қаржылық шығын шықса, сондай-ақ тепе-тең қаржы құйылады. Тұтыну функциясын сызықтық деп қарастырсақ, одан келесі қорытынды жасаймыз:

$$C = aY + b,$$

a және b эмпирикалық түрінде берілген. Бұдан шығатын екі белгісіз C және Y бар сызықтық теңдеулер жүйесі шығады ($0 < a < 1$, $b > 0$).

Қарапайым екі секторлық макроэкономикалық модельді қарастыруды жалғастырайық. Бұл модельде, тұтынумен C және табыстар Y арасында тепе-теңдік жүйесінен көрінеді:

$$\begin{cases} C = aY + b; \\ Y = C + I. \end{cases}$$

Мұнда I инвестиция және a және b параметрларына шектеу қоямыз:

$$0 < a < 1; b > 0.$$

Эндогендік C Y өлшемдерді, экзогендік a , b және I өлшемдер арқылы көрсету. Естеріңізге сала кетейік, экономикалық есептерде, модельдерді пайдаланған кезде барлық өлшемдер экзогендік, яғни кірістік өлшемдер (модельдерден тыс жерде есептелетін) және эндогендік, яғни шығыстық өлшемдер (шешу үрдісте белгіленетіндер) болып бөлінеді.

Есепті шешу үшін теңдік жүйесін матрицалық формада көрсетейік. Алдын ала барлық эндогендік өлшемдерді (тұтыну C және табыстар Y) теңдіктің сол жағына шығарайық:

$$\begin{cases} C - aY = b; \\ -C + Y = I. \end{cases}$$

Бұл теңдік жүйесін басқа түрде былай жазуға болады:

$$A \cdot X = B$$

Мында,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} C \\ Y \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b \\ I \end{bmatrix};$$

Бұл жазудың дұрыстығын дәлелдеу үшін A матрицасын, X вектор-бағанға көбейтеміз:

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C - aY \\ -C + Y \end{bmatrix}.$$

Шыққан вектор-баған элементін, B вектор-баған элементіне теңестіру арқылы керекті теңдік жүйесін табамыз.

Матрицалық теңдікті кері матрицаға A^{-1} көбейтіп және ескере отырып:

$$A^{-1} \cdot A = E,$$

$$A \cdot X = B$$

Оңай табамыз:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Жалпы жағдайда 2×2 көлемдегі A матрицаға:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

A^{-1} кері матрицаның түрі:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

A матрицаның элементтерін қойғанда:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Белгілеушіні есептеп шығарып:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & -a \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-a) = 1 - a$$

Табамыз

$$A^{-1} = \frac{1}{1-a} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Бұл X вектор-баған анықтауға көмектеседі:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{1-a} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b \\ I \end{bmatrix} = \frac{1}{1-a} \begin{bmatrix} b+aI \\ b+I \end{bmatrix}$$

Басқа жағынан қарастырғанда, X вектор-топшасын келесідей анықтаймыз:

$$X = \begin{bmatrix} C \\ Y \end{bmatrix}$$

Екі вектор-бағандарын элементтерін теңестіргенде, қорытындылаймыз:

$$C = \frac{b+aI}{1-a}, \quad Y = \frac{b+I}{1-a}.$$

Егер де инвестицияның көлемінің деңгейі және табыстың тұтыну (және параметрлері) деңгейінің тәуелділігі белгілі болса, анықталған қорытынды C тұтыну және Y табыстар арасындағы тепе-теңдік нүктесін анықтайды.

Енді кесте (матрица) түрінде құрылған *матрицалық модельді* қарастырайық. Мұндай модельдер арқылы өндірістің шығындарының және өндірістің нәтижесінің бір-біріне қарым-қатынасын білдіреді. Матрицалық модельдердің кең таралуы келесі факторларға байланысты, оларды кесте түрінде жазылуы компьютерлік өңдеулерді жылдамдатады және есеп нәтижелерін нақты көрсетеді.

Қарапайым макроэкономикалық модельді қарастырғанда, экономиканы екі сектордан тұратындығын ескереді: өндіруші және тұтынушы. Өндірушіден тауарлық ағымдары және қызмет көрсету ағымы жылжыса, ал тұтынушылардан ақша ағымы жылжиды (1-сурет):



1-сурет – Өндіруші мен тұтынушы қызметі

Белгіленгендей, тауарлармен қызметтерді физикалық көлемдерде емес, ағымдық нарықтық бағаларда, яғни ақшалай бағалану көлемінде өлшенуге тиісті. Сонда барлық ағымдарды ақшалай өлшемдермен қарастыруға болады.

Жоғарыдағы көрсетілген схемадағы өндіруші деп белгілегеніміз, белсенді экономикалық іс-әрекетпен айналысып жатырған тұтас өндіріс салалары, ірі кәсіпорындар, алуан түрлі фирмалар болып табылады. Олардың шығарып жатырған барлық өнімдерін (тауарларды және қызметтерді) екі бөлікке бөлуге ыңғайлы: *аралық өнім және соңғы өнім*.

Аралық өнім дегеніміз бұл өндірушілердің бір-бірімен алмасатын немесе өндірушілердің өз қажеттіліктеріне пайдаланатын өнімдерді атаймыз. Мысалы: электроэнергия қуаты, оны барлық салаларда пайдаланады. Сонымен қатар, энергетикалық кешендер көптеген салалардың өнімдерін қажет етеді.

Соңғы өнім дегеніміз бұл тұтынушыларға арналған өнімдердің барлық түрлері.

Кейбір жағдайларда, соңғы сұраныс деген терминдер қолданылады, яғни нарықтық экономикада өз тұтынушысын тапқан тауар, бағамен белгіленеді.

Осыған орай, қарапайым мысал қарастырайық. Өндіруші екі фирмадан құрастырылған: 1 фирма және 2 фирма. Бағалану көлемінде 1 фирманың жыл бойы шығаратын, біртұтас өнім бағалану көлемін 400 құрайды (бұл 400 жүз доллар немесе 400 миллион рубль құрауы мүмкін). Өнімді өндіру үшін 1 фирма 40 көлемінде өзіндік өнімін пайдаланған және 320 көлемінде өнімді 2 фирмадан сатып алған.

2 фирманың аналогиялық көрсеткіштері: біртұтас өнім 500, фирманың өзіндік өнімдері 100, 1 фирмадан сатып алған көлемі 200. Сонымен, 1 фирма өзіне 40 бірлік, 2 фирмаға 200 бірлік көлемде өнім өндіреді. Егерде 1 фирманың біріккен өнімінен, 400-ге тең аралық өнімнің

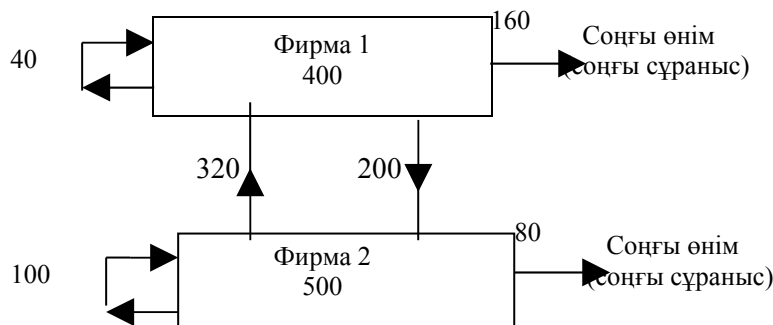
екі көрсеткішін алып тастасақ онда 1 фирманың соңғы өнімінің көлемін табамыз, яғни ол 160-қа тең:

$$400 - 40 - 200 = 160.$$

Аналогиялық есеп жүргізсек 2 фирмаға, ол өзіне 100 бірлік және 1 фирмаға 320 бірлік аралық өнім дайындаған. 2 фирманың біріккен өнімінен 500 бірліктен, аралық өнімдерді алып тастасақ, біз 2 фирманың соңғы өнімінің көлемін анықтаймыз:

$$500 - 100 - 320 = 80.$$

Есептеп шығарған нәтижелерді келесі схема түрінде көрсетуге болады (2-сурет):



2-сурет – Фирмалардың өнім көлемдері

Жоғарыда көрсетілген схемада, анықтаушы сызықшалармен, бағалық ағымдар белгіленген, ал сандармен сол ағымдардың санының белгілері. Төртбұрыштарда әр фирманың біріккен өнімі көрсетілген. Жалпы нәтижелерді белгілеу үшін, біз осы мысалға әлі де ораламыз [3].

Екі өндірушіні мысалға келтіріп, жоғарыда көрсетілген модель *шығындар - өндіріс* немесе *салааралық модель* деп аталады.

Келесі, мөлшерленген өлшемдерді, яғни өнім бірлігінің шығындарын қарастырайық. Қарапайым мысал келтірейік (1-кесте).

1-кесте – Фирма өнімінің шығыны

Фирма	Фирмаға жеткізулер	
	1	2
1	0,1	0,4
2	0,8	0,2

Кестенің бірінші бөлігінен көреміз, 1 фирма 1 өнім бірлігін өндіру үшін, 1 фирмандан, (яғни өзінен) 0,1 көлемде өнім алу қажет, 2 фирмандан 0,8 көлемде, 1 фирманың, 40 көлемінде өзіндік өнімін, 1 фирманың өнім жиынтығына бөлеміз:

$$\frac{40}{400} = 0,1$$

Аналогия бойынша 2 фирманың 1 фирмаға қарасты өнім бірлігін жеткізу үшін:

$$\frac{320}{400} = 0,8$$

Кестенің екінші бөлігін қарастырсақ, 2 фирманың, өнім бірлігін өндіру үшін, 2 фирмаға жеткізулер қарастырылған. Тағы да ескерте кетейік, бағаланған және мөлшерленген түрлерінде. Оның кестелерін, келесі матрица арқылы көрсетуге болады:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix},$$

Мында, a_{ij} матрица элементтері, *тіке шығындардың коэффициенттері* немесе *өндірістік коэффициенттер* деп аталады.

Шығындар - өндіріс моделінің ерекшелігі *сызықтық байланыстары*, яғни өнімнің шығару көлемі тікелей шығындардың көлеміне байланысты. Мысалы, біз өнім көлемін екі есе

ұлғайтуын жоспарласақ, біз шығындарды да екі есе жоспарлауымыз керек. Сызықтық байланыстар, осы есептеулерді жеңілдетуге арналған.

Сызықтық байланыстарға қарапайым мысал келтірейік. Егер 1 және 2 фирмалардың біріккен өнімдерін x_1 және x_2 белгілесек, соңғы өнімді y_1 және y_2 белгілесек, сонда сызықтық теңдік келесі жүйелік түрде көрсетіледі:

$$\begin{cases} x_1 = 0,1x_1 + 0,4x_2 + y_1 \\ x_2 = 0,8x_1 + 0,2x_2 + y_2 \end{cases}$$

Мында, фирмалардың өндірісінің бір-бірімен байланыстарын және соңғы өніммен (сұранысымен) байланысы көрсетіледі. Егер де 1 фирманың өзіндік шығындары 0,1, құраса, оған x_1 өнімін өндіру үшін ол $0,1x_1$ көлемде болады. Сәйкесінше, 2 фирма бір бірлік өнімін өндіру үшін 1 фирманың 0,4, сатып алады, а x_2 өнім өндіру үшін сатып алу көлемі $0,4x_2$ құрайды. 1 фирманың өзіне өзі және 2 фирмаға өнімді жеткізуі соңғы өніммен қосындысы y_1 құрайды, бұл біріккен өнімге x_1 сәйкес. Осы қорытынды, жүйенің бірінші теңдеуі болып табылады. Аналогия бойынша, екінші теңдеудің шешімін табамыз.

Бұл теңдеу жүйесін матрицалық белгілер бойынша жазамыз:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Немесе одан да жинақы түрде:

$$X = A \cdot X + Y,$$

A тіке шығындардың коэффициентінің матрицасы, X және Y , біріккен және соңғы өнімдердің вектор-бағандары.

Жалпы алғанда, өндіріс салаларының санын n деп белгілесек, тіке шығындардың коэффициентінің матрицасының көлемін $n \times n$ деп енгізуге болады:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

i саласы, k саласына бір бірлік өнім өндіру үшін қаншама өнімнің саны қажет ететінін элемент a_{ik} арқылы белгіленеді. Егер де біртұтас X өнім жиынтығы және соңғы өнімді Y вектор-бағанды келесідей белгілесек:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

x_1, y_1 i саласының біртұтас және соңғы өнімдері, онда X және Y матрицалық теңдеумен сипатталады:

$$X = A \cdot X + Y$$

Бұл Леонтьев формуласы деп аталады.

Осы формуланы түрлі есептер шығаруға қалай қолданатынын қарастырып өтейік.

Мысалы, егер біртұтас өнімнің көлемі және де тіке шығындардың коэффициентінің матрицасы белгілі болса, әр саланың соңғы өнімін анықтау қажет. Бұл есепті шығару үшін теңдеуді келесі түрде жазып:

$$Y = X - A \cdot X$$

A және Y сандарын орындарына қою қажет.

Мысал ретінде, екі өндіруші фирмаларды қарастырайық, 1 фирманың біртұтас өнімі 200 тең, ал 2 фирманың біртұтас өнімі 300. Бұл жағдайда:

$$X = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix},$$

Теңдеуге қойғанда, табамыз:

$$Y = X - A \cdot X = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 140 \\ 220 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 80 \end{bmatrix}.$$

Осыдан шыққан қорытынды 1 фирманың соңғы өнімі 60-қа тең, ал екінші фирманыкі 80-ге тең.

Енді күрделілеу, қиын кері есепті қарастырайық, яғни белгілі соңғы өнім (соңғы сұраныс) бойынша біртұтас өнімді анықтау. Тәжірибеде дәл осындай есептер жиі кездеседі, себебі, нарықтық экономика кезеңінде өнімдерді өндіру көлемін сұраныс анықтайды.

Леонтьев теңдеуін пайдаланамыз, X жағындағы көрсеткіштерді, солға қарай ауыстырып, нақты келесі теңдеу ұсынылады:

$$X - A \cdot X = Y$$

Бұл теңдеуді басқа түрде де қарастыруға болады:

$$(E - A) \cdot X = Y$$

Матрицалармен жұмыс істегендегі операциялардың қасиеттерін және бірлік матрицаларды анықтайтын қасиеттерді еске түсірсек:

$$(E - A) \cdot X = E \cdot X - X \cdot A = X - A \cdot X$$

Енді теңдеудің екі жағында көбейтеміз $(E-A)$

$$(E - A)^{-1} \cdot (E - A) \cdot X = (E - A)^{-1} \cdot Y.$$

Кері матрицалардың анықтамасы бойынша, ескере отырып:

$$(E - A)^{-1} \cdot (E - A) = E$$

қорытындысында:

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y.$$

Енді, алғашқыда қарастырған, екі өндіруші фирмаларымызға оралайық.

Мысалы, 1 фирманың соңғы өнімі 70, 2 фирманыкі 120 деп жорамалдасақ. Әр фирманың қажетті біртұтас өнімін анықтау керек. Тіке шығындардың коэффициенттерінің матрицасы белгілі деп есептелгенде:

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Есепті шешу үшін, матрицаны табамыз:

$$(E - A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.4 \\ -0.8 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Жалғастырып, біз осы матрицаға кері матрицаны есептеп шығарамыз:

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{0.4} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.8 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2.25 \end{bmatrix}.$$

көлемі 2×2 кері матрицаны есептеп шығаратын, формуланы пайдаландық. Енді белгіленген соңғы өнім Y вектор - баған формулаға қойып, табамыз:

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2.25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 70 \\ 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 260 \\ 410 \end{bmatrix}.$$

Қорытынды бойынша, соңғы сұранысты қанағаттандыру үшін, 1 фирманың біртұтас өнімі 260, ал 2 фирманың біртұтас өнімі 410 болуы тиіс.

Ерекше айта кететін жай, есептің ең күрделі бөлігі, бұл кері матрицаны есептеп шығару, егерде тәжірибедегі есептердің көлемдері ауқымды болып табылатынын ескерсек, олардың көрсеткіштері бірнеше жүздік болып есептеледі. Бірақта егер матрица табылса, әр түрлі нұсқалар есептеп шығару қиын процедура емес.

Мысалы, 1 фирманың соңғы өнімі 60-қа, ал 2 фирманыкі 80-ге тең болса, яғни:

$$Y = \begin{bmatrix} 60 \\ 80 \end{bmatrix}$$

бұрын есептеп шығарған матрицаны пайдаланып $(E - A)^{-1}$, X оңай табамыз:

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2.25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 60 \\ 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \end{bmatrix}.$$

Сонымен, соңғы сұраныстың кейінгі нұсқасын қанағаттандыру үшін, 1 фирманың біртұтас өнімі 200, ал 2 фирманың біртұтас өнімі 300 болуға тиіс.

Қорытындылай келіп, тәжірибеде біз екі фирмамен жұмыс істемейміз, жүздеген өндіріс салаларды қарастырамыз, сондықтан күрделі деңгейдегі есептерді компьютерлермен шығарып, оларды өз деңгейдегі ақпараттық бағдарламалармен қамтамасыз етуді қажет етеді.

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Коршунова Н. Математика в экономике / Н. Коршунова, В. Плясунов. – Москва : Вита Пресс. – 1996.
2. Красс, М. С. Основы математики и её приложения в экономическом образовании / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – М. : «Дело». – 2002.
3. Сабитова, Х. К. Экономико-математические методы / Х. К. Сабитова. – Алматы : Кайнар. – 2003.