

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ БЕЗМОМЕНТНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК

А. Н. Кушеккалиев, кандидат физ.-мат. наук, доцент

Западно-Казахстанский аграрно-технический университет имени Жангир хана

Көп қабатты қабықша бойымен тангенстік екіпінді әсерлердің стационарлық емес толқынды процессі қарастырылады. Тангенстік қорытындысының теңдеулерінің серпімділік теориялары, төменгі желік бойымен толқындарға ұзын толқындық жақындаулар көп қабаттыда айналма үш өлшемді цилиндрлік қабыққа асимптотикалық интеграциялау әдісімен жүзеге асады.

Рассматривается нестационарный волновой процесс в многослойной оболочке при продольных тангенциальных ударных воздействиях. Вывод тангенциальных низкочастотных длинноволновых приближений в случае нестационарных продольных волн в многослойной круговой цилиндрической оболочке осуществляется методом асимптотического интегрирования трехмерных, уравнений теории упругости.

This work is considered intermittent wave process in a multi-layer cover at longitudinal tangential shock effects. Resumes about tangential low frequency of long wave approach in case of intermittent longitudinal wave in a multi-layer circular cylindrical cover is carried out by a method of asymptotic three-dimensional integration, the equations theory of elasticity.

Рассмотрим нестационарный волновой процесс в многослойной оболочке, каждый слой которой выполнен из изотропного упругого материала. Введем следующие обозначения для k -го слоя оболочки ($k=1, n$): E_k – модуль Юнга; ν_k – коэффициент Пуассона; ρ_k – плотность; $2h_k$ – толщина слоя.

Отнесем каждый слой к криволинейной системе координат $(\alpha_{1,k}, \alpha_{2,k}, \alpha_{3,k})$, совмещая координатную поверхность $\alpha_{3,k} = 0$ со срединной поверхностью слоя, принимая в качестве параметра $\alpha_{1,k}$ длину дуги образующей, в качестве $\alpha_{2,k}$ – длину дуги направляющей окружности, $\alpha_{3,k}$ – расстояние, отсчитываемое по нормали к срединной поверхности. Индекс, обозначающий номер слоя, в дальнейшем там, где не возникает разночтений, будем опускать.

Уравнения движения и закона Гука для каждого слоя имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \sigma_{3i}}{\partial \alpha_3} - \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{1,3}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \sigma_{2,3}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \alpha_3} - \rho \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$i \neq j = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)k^2} \left[\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3} \right], \\ \sigma_{31} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_3} \right] \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_1} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

где σ_{ij} – напряжения; v_i – компоненты вектора перемещений; $k^2 = \frac{1-2\nu}{2-2\nu}$.

Рассмотрим случай, когда лицевые поверхности оболочки свободны от нагрузок. Сформулируем для них граничные условия:

$$\begin{aligned}\alpha_{3,1} &= -h_1 : \sigma_{3i,1} = 0 \\ \alpha_{3,n} &= h_n : \sigma_{3i,n} = 0, i = 1, 2, 3.\end{aligned}\quad (3)$$

Граничные условия на стыке двух соседних слоев оболочки [3]:

$$\alpha_{3,k} = h_k, \alpha_{3,k+1} = -h_{k+1} : \sigma_{3i,k} = \sigma_{3i,k+1}, v_{i,k} = v_{i,k+1}, i = \overline{1,3}, k = \overline{1, n-1} \quad (4)$$

Граничные условия на торце оболочки, к которому приложена ударная продольная нагрузка тангенциального типа, при $\alpha_{1,k} = 0$:

$$\sigma_{11,k} = f(\alpha_{2,k}, \alpha_{3,k})H(t), \sigma_{1j,k} = 0, j = 2, 3, k = \overline{1, n}, \quad (5)$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда.

Рассмотрим случай нулевых начальных условий. Произведем в уравнениях движения и уравнениях закона Гука растяжение масштабов независимых переменных по формулам

$$\alpha_{i,k} = R\eta_k^q \xi_{i,k}, \alpha_{3,k} = R\eta_k \varsigma_{i,k}, t_k = Rc_{2,k}^{-1} \eta_k^q \tau_k, \quad (6)$$

где $\eta_k = \frac{h_k}{R}$ – основной малый параметр; $c_{2,k} = \frac{E_k}{2(1+\nu_k)\rho_k}$ – скорость волны сдвига в k -м слое оболочки ($k = 1, n$).

Для компонент НДС каждого слоя введем следующие асимптотики:

$$\begin{aligned}v_i &= R\eta^q v_i^0, v_3 = R\eta v_3^0, \sigma_{ii} = E\sigma_{ii}^0 \\ \sigma_{ij} &= E\sigma_{ij}^0, \sigma_{3i} = E\eta^{1-q}\sigma_{3i}^0, \sigma_{33} = E\eta^{2-2q}\sigma_{33}^0.\end{aligned}\quad (7)$$

В рамках погрешности $O(\eta^{2-2q})$ уравнения для величин с индексом «0» для каждого слоя оболочки примут вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{ii}^0}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \sigma_{3i}^0}{\partial \varsigma} - \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 v_i^0}{\partial \tau^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{i3}^0}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \sigma_{j3}^0}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \sigma_{33}^0}{\partial \varsigma} - \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 v_3^0}{\partial \tau^2} &= 0, \\ \sigma_{ii}^0 &= \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_i^0}{\partial \xi_i} + \nu \frac{\partial v_j^0}{\partial \xi_j} \right), \\ \sigma_{ij}^0 &= \frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v_i^0}{\partial \xi_j} + \frac{\partial v_j^0}{\partial \xi_i} \right), \\ \frac{\partial v_i^0}{\partial \varsigma} &= 0, \quad \frac{\partial v_3^0}{\partial \varsigma} = -\nu(\sigma_{ii}^0 + \sigma_{jj}^0).\end{aligned}\quad (8)$$

Из граничных условий будем иметь:

$$\begin{aligned}\varsigma_n &= 1: \sigma_{3i,n}^0 = 0, \\ \varsigma_k &= -1, \varsigma_{k+1} = 1: E_k \eta_k^{1-qk} \sigma_{3i,k}^0 = E_{k+1} \eta_{k+1}^{1-qk+1} \sigma_{3i,k+1}^0, R\eta_k^{qk} v_{i,k}^0 = R\eta_{k+1}^{qk+1} v_{i,k+1}^0, \\ R\eta_k v_{3,k}^0 &= R\eta_{k+1} v_{3,k+1}^0\end{aligned}\quad (9)$$

$$\varsigma_{,1} = -1: \sigma_{3i,1}^0 = 0.$$

Рассмотрим следующую зависимость компонент НДС каждого слоя от нормальной координаты [1,2]:

$$\begin{aligned}v_i^0 &= v_i^{(0)}, v_3^0 = v_3^{(0)} + \varsigma v_3^{(1)}, \sigma_{ii}^0 = \sigma_{ii}^{(0)}, \sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^{(0)} \\ \sigma_{3i}^0 &= \sigma_{3i}^{(0)} + \varsigma \sigma_{3i}^{(1)}, \sigma_{33}^0 = \sigma_{33}^{(0)} + \varsigma \sigma_{33}^{(1)} + \varsigma^2 \sigma_{33}^{(2)}\end{aligned}\quad (10)$$

где величины с индексами в круглых скобках не зависят от ς .

Переходя в (8), (9) к представлениям (10) и группируя слагаемые при одинаковых степенях ς , получим следующую систему для асимптотически главных компонент

$\sigma_{ii}^{(0)}, \sigma_{ij}^{(0)}, \sigma_{i3}^{(0)}, \sigma_{i3}^{(1)}, \nu_i^{(0)}$:

$$\frac{\partial \sigma_{ii,k}^{(0)}}{\partial \xi_{i,k}} + \frac{\partial \sigma_{ij,k}^{(0)}}{\partial \xi_{j,k}} + \sigma_{3i,k}^{(1)} - \frac{1}{2(1+\nu_k)} \frac{\partial^2 \nu_{i,k}^{(0)}}{\partial \tau_k^2} = 0, \quad (11)$$

$$\sigma_{ij,k}^{(0)} = \frac{1}{1-\nu_k^2} \left(\frac{\partial \nu_{i,k}^{(0)}}{\partial \xi_{i,k}} + \nu \frac{\partial \nu_{j,k}^{(0)}}{\partial \xi_{j,k}} \right), \sigma_{ij,k}^{(0)} = \frac{1}{2(1+\nu_k)} \left(\frac{\partial \nu_{i,k}^{(0)}}{\partial \xi_{j,k}} + \frac{\partial \nu_{j,k}^{(0)}}{\partial \xi_{i,k}} \right).$$

Из граничных условий получим

$$\begin{aligned} \sigma_{3i,1}^{(0)} - \sigma_{3i,1}^{(1)} &= 0, \quad \sigma_{33,1}^{(0)} - \sigma_{33,1}^{(1)} + \sigma_{33,1}^{(2)} = 0, \\ \sigma_{3i,n}^{(0)} + \sigma_{3i,n}^{(1)} &= 0, \quad \sigma_{33,n}^{(0)} + \sigma_{33,n}^{(1)} + \sigma_{33,n}^{(2)} = 0, \\ E_m \eta_m (\sigma_{3i,m}^{(0)} + \sigma_{3i,m}^{(1)}) &= E_{m+1} \eta_{m+1} (\sigma_{3i,m+1}^{(0)} - \sigma_{3i,m+1}^{(1)}), \\ E_m \eta_m (\sigma_{33,m}^{(0)} + \sigma_{33,m}^{(1)} + \sigma_{33,m}^{(2)}) &= E_{m+1} \eta_{m+1} (\sigma_{3i,m+1}^{(0)} - \sigma_{3i,m+1}^{(1)} + \sigma_{33,m+1}^{(2)}), \\ \nu_{i,m}^{(0)} = \nu_{i,m+1}^{(0)}, \quad \eta_m (\nu_{3,m}^{(0)} + \nu_{3,m}^{(1)}) &= \eta_{m+1} (\nu_{3,m+1}^{(0)} - \nu_{3,m+1}^{(1)}), \quad m = \overline{1, n-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Основой для дальнейшего вывода служит пятое уравнение (12). Рассмотрим его при $m=n-1$ и условия третьего, в результате получим выражение для $\sigma_{3i,n-1}^{(0)}$ через $\sigma_{3i,n-1}^{(1)}$ и $\sigma_{3i,n-1}^{(2)}$. Далее при $m=n-2, \dots, 1$ найдем выражения для $\sigma_{3i,m}^{(0)}$ через $\sigma_{3i,n}^{(1)}, \dots, \sigma_{3i,m}^{(1)}$. Рассмотрим пятое уравнение (12) при $m=1$ и учтем первое уравнение (12), из которого найдем выражение для $\sigma_{3i,1}^{(0)}$ через $\sigma_{3i,1}^{(1)}$. Получим следующее уравнение:

$$\sum_{k=1}^n E_k \eta_k \sigma_{3i,k}^{(1)} = 0. \quad (13)$$

Из первого уравнения (11) получим выражение для $\sigma_{3i,k}^{(1)}$. Таким образом, уравнение (11) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^n E_k \eta_k \left(\frac{\partial \sigma_{ii,k}^{(0)}}{\partial \xi_{i,k}} + \frac{\partial \sigma_{ij,k}^{(0)}}{\partial \xi_{j,k}} - \frac{1}{2(1+\nu_k)} \frac{\partial^2 \nu_{i,k}^{(0)}}{\partial \tau_k^2} \right) = 0. \quad (14)$$

Дальнейшей целью является вывод двумерных представлений системы относительно асимптотически главных компонент НДС. Введем обозначения

$$\nu_{i,k}^{(0)} = \nu_i, \quad (15)$$

для усилий T_i, S и усредненной плотности ρ :

$$T_i = 2 \sum_{k=1}^n h_k \sigma_{ii,k}, \quad S = 2 \sum_{k=1}^n h_k \sigma_{ij,k}, \quad \rho = \frac{\sum_{k=1}^n \rho_k h_k}{h}, \quad h = \sum_{k=1}^n h_k. \quad (16)$$

Переходя в (11) к представлениям (16) и размерным переменным, получим окончательный вид системы:

$$\frac{\partial T_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial S}{\partial \alpha_j} - 2\rho h \frac{\partial^2 \nu_i}{\partial t^2} = 0, \quad T_i = C_1 \frac{\partial \nu_i}{\partial \alpha_i} + C_2 \frac{\partial \nu_j}{\partial \alpha_j}, \quad S = D \left(\frac{\partial \nu_i}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \nu_j}{\partial \alpha_i} \right), \quad (17)$$

где $C_1 = \sum_{k=1}^n \frac{2E_k h_k}{1-\nu_k^2}$, $C_2 = \sum_{k=1}^n \frac{2E_k h_k \nu_k}{1-\nu_k^2}$, $D = \sum_{k=1}^n \frac{2E_k h_k}{1+\nu_k}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коссович, М. Ю. Асимптотическое интегрирование трехмерных уравнений теории упругости в двухслойных пластинах в случае нестационарных продольных волн / Л. Ю. Коссович, Н. А. Пушкина, О. В. Шевцова // Механика деформируемых сред. – Саратов. – 2002. – Вып. 14. – С. 87-93.
2. Амбарцумян, С. А. Общая теория анизотропных оболочек / С. А. Амбарцумян. – М. 1971. – 448 с.