

Л. С. СПАНҚҰЛОВА, Р. К. КЕРІМБАЕВ

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,
Алматы, Қазақстан

ЭРРОУ-ПРАТТ КОЭФФИЦИЕНТТЕРІНІҢ ПАЙДАЛЫЛЫҚ ФУНКЦИЯСЫНЫҢ ЖАНАМАСЫМЕН БАЙЛАНЫСЫ

Мақалада Arrow-Pratt коэффициентінің мәнін геометриялық интерпретациялау арқылы пайдалылық функцияларының кейбір қасиеттерін анықтау мәселесі зерттеледі. Атап айтқанда, координаталар басынан осы коэффициент есептелетін нүктедегі жанама түзуге параллель түзуге дейінгі қашықтықты анықтайтын Arrow-Pratt коэффициентінің геометриялық қасиеттері ашылады. Пайдалылық функцияларының мәні оң, ал анықтау облысы нақты түзу болады деп есептеледі. Демек, коэффициент мәнінің өсуі және кемуі пайдалы функцияның дөңестігін немесе ойыстығын анықтайды. Arrow-Pratt коэффициентінің мәні артқан сайын жанама түзу бастапқы нүктеден алыстайды. Бұл процесс қызметтік функциялардың дөңестігін сипаттайды. Біздің көзқарасымыз мынада: жанама түзудің және айнымалылардың дисперсиясымен және Arrow-Pratt коэффициентімен байланысты еркін мүшесі бар жанамаға параллель түзудің көмегімен біз пайдалы функцияның әрекетін анықтаймыз: монотондылық, дөңес. Бұл сызықтардың координат басына қатысты орналасуының жиырма төрт түрлі нұсқалары келтірілген, олар жанама түзу өтетін нүктедегі пайдалы функциялардың бірінші және екінші туындыларының белгілеріне қарай төрт топқа бөлінеді.

Түйін сөздер: Arrow-Pratt коэффициенті, пайдалылық функциясы, гессиан, якобиан, аналитикалық геометрия.

R. K. KERIMBAYEV, L. S. SPANKULOVA

Al-Farabi Kazakh National University,
Almaty, Kazakhstan

RELATIONSHIP OF THE ARROW-PRATT COEFFICIENTS WITH THE TANGENT TO THE UTILITY FUNCTION

The article discusses a geometric approach for determining some properties of the utility function using the Arrow-Pratt coefficient. In particular, the geometric properties of the Arrow-Pratt coefficient are disclosed, it turned out that the Arrow-Pratt coefficient determines the distance from the origin to the straight line parallel to the tangent line at the point where the Arrow-Pratt coefficient is calculated. Therefore, an increase and decrease in the value of this coefficient determines the convexity or concavity of the utility function. With an increase in the value of the Arrow-Pratt coefficient, the tangent line moves away from the origin. This process describes the convexity of the utility function as a function of location from the origin. There are two concepts: the expected utility model and the utility function. Our approach is that due to a tangent line and a straight line parallel to the tangent with a free term, associated with the variance of variables and the Arrow-Pratt coefficient, we determine the behavior of the utility function: monotonicity, convexity, etc. The location of these lines relative to the origin gives us twenty-four different options, which are divided into four groups, depending on the signs of the first and second derivatives of the utility function at the point where the tangent line passes.

Keywords: Arrow-Pratt coefficient, utility function, Hessian, Jacobian, analytic geometry.

УДК 519.87

<https://doi.org/10.47533/2020.1606-146X.167>
Ш. Д. МАХМУДОВА¹, А. Д. МАХМУДОВ², А. Н. УРАЗГАЛИЕВА^{1*}

¹Западно-Казахстанский аграрно-технический университет имени Жангир хана,
г. Уральск, Казахстан

²Западно-Казахстанский инновационно-технологический университет,
г. Уральск, Казахстан

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СИТУАЦИИ РАВНОВЕСИЯ В ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ

В статье рассматривается применение теории оптимального управления для решения уравнений Гамильтона-Якоби с фазовыми ограничениями.

Предлагается метод конструирования обобщенных решений с помощью задач оптимального управления. Приводятся результаты и анализ численных экспериментов, условий существования равновесных ситуаций в бескоалиционных дифференциальных играх нескольких лиц, а именно условия существования равновесных ситуаций в бескоалиционных дифференциальных играх нескольких лиц, определяя действие по Гамильтону, получены необходимые условия в форме уравнений Гамильтона-Якоби.

Теория игр как прикладная математическая теория используется для понимания и объяснения механизмов, которые используются, когда люди принимают решение. Теория способствует функционированию логики стратегического планирования и взаимосвязи между людьми. Теория игр как метод прикладной математики применяется для изучения поведения в разных ситуациях, помогает понять поведение экономических субъектов.

Теория имеет много приложений может быть использована в разных областях как стратегические игры, области администрирования, экономики, исследования искусственного элемента. В статье излагается математический метод изучения оптимальных ситуаций в теории игр.

Ключевые слова: дифференциальная игра; динамические системы; ситуация равновесия; равновесная траектория; функция Гамильтона-Якоби; уравнений Эйлера-Лагранжа; условия Вейерштрасса-Эрдмана.

Введение. Рассматривается дифференциальная игра нескольких лиц, состояние которой характеризуется в каждый момент времени фазовым вектором $x(t)$ n -мерного евклидова пространства, при заданных начальных условиях и изменяющемся в соответствии с дифференциальным уравнением вида [1]:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_1(t), \dots, u_i(t), \dots, u_N(t)), \quad t \in [t_0, t_f], \quad (1)$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0 \quad (2)$$

Материалы и методы исследования

Функция Гамильтона $N_i(t)$ для каждого игрока определена следующим образом [1]:

$$H_i(t) = \max_{u_i(t) \in U_i(t)} \prod_i (t, x(t), u_1(t), \dots, u_i(t), \dots, u_N(t), \psi_i(t)) = \psi_i(t) f(t, x(t), u(t) \| u_i^p(t)) + h_i(t, x(t), u(t) \| u_i^p(t)), \quad i = \overline{1, N}. \quad (3)$$

* E-mail корреспондирующего автора: urazgalieva.akmaral@mail.ru

Функция Гамильтона i -го игрока есть непрерывная функция времени, то есть не зависит от программной стратегии $u_i(t)$ этого игрока. Из условия (3) очевидно, что

$$\prod_i (t, x(t), u(t) \| u_i(t), \psi_i(t)) \leq \prod_i (t, x(t), u(t) \| u_i^p(t), \psi_i(t)) = H_i(t), \quad (4)$$

где

$$u_i(t) \in U_i(t), t \in [t_0, t_f], i = \overline{1, N}.$$

По постановке задачи [1] функция $u_i(t)$ имеет конечное число точек разрыва. Пусть τ – одна из них.

Перейдя к пределам в неравенстве (4):

$$\lim_{t \rightarrow \tau-0} \prod_i (t, x(t), u(t) \| u_i(t), \psi_i(t)) \leq \lim_{t \rightarrow \tau-0} \prod_i (t, x(t), u(t) \| u_i^p(t), \psi_i(t)) = \\ = \lim_{t \rightarrow \tau-0} H_i(t), i = \overline{1, N}.$$

Отсюда следует

$$\prod_i (\tau, x(\tau), u(\tau) \| u_i(\tau-0), \psi_i(\tau)) \leq H_i(\tau-0), i = \overline{1, N}.$$

Из полученного неравенства с учетом условия (3) имеем:

$$H_i(\tau) = \max_{u_i(\tau-0) \in U_i(\tau)} \prod_i (\tau, x(\tau), u(\tau) \| u_i^p(\tau-0), \psi_i(\tau)) \leq H_i(\tau-0).$$

С другой стороны, по условию (4), получим:

$$H_i(\tau-0) = \lim_{t \rightarrow \tau-0} \prod_i (t, x(t), u(t) \| u_i^p(t), \psi_i(t)) = \\ = \prod_i (\tau, x(\tau), u(\tau) \| u_i^p(\tau-0), \psi_i(\tau)) = \\ = \lim_{u_i \rightarrow u_i^p(\tau-0)} \prod_i (\tau, x(\tau), u(\tau) \| u_i(\tau-0), \psi_i(\tau)) \leq \\ \leq \prod_i (\tau, x(\tau), u(\tau) \| u_i^p(\tau), \psi_i(\tau)) = H_i(\tau) \quad i = \overline{1, N}.$$

Итак, мы получили неравенства:

$$H_i(\tau-0) \leq H_i(\tau) \quad \text{и} \quad H_i(\tau-0) \geq H_i(\tau), \quad i = \overline{1, N},$$

из которых следует, что

$$H_i(\tau-0) = H_i(\tau), \quad i = \overline{1, N},$$

То есть, функция $H_i(\tau)$ – непрерывна слева в точке τ .

При условии, что $t \rightarrow \tau + 0$, рассуждая аналогично с неравенства (4), получаем непрерывность функции Гамильтона $H_i(\tau)$ в точке справа.

Итак, мы получили, что $H_i(t)$ непрерывна во всех точках отрезка $[t_0, t_f]$.

Дальнейшие рассуждения будут проводиться с допущением, что функция Гамильтона $H_i(t)$, $i = \overline{1, N}$ гладкая.

Условия непрерывности функций $\psi_i(t)$ и $H_i(t)$ в точках излома $\dot{x}$ называются условиями Вейерштрасса – Эрдмана [5] и записываются в виде:

$$H_i(\tau+0) = H_i(\tau-0), \quad i = \overline{1, N},$$

$$\psi_i(\tau+0) = \psi_i(\tau-0), \quad i = \overline{1, N}.$$

Рассмотрим функционал для каждого игрока, имея функцию Гамильтона (3):

$$S_i(x(\cdot), u(\cdot) / u_i(\cdot), \psi_i(\cdot)) = g_i(x(t_f)) + \\ + \int_{t_0}^{t_f} [H_i(t, x(t), u(t) / u_i(t), \psi_i(t)) - \psi_i(t) \dot{x}(t)] dt, \quad i = \overline{1, N} \quad (5)$$

Здесь проведена операция максимизации по допустимому управлению $u_i(t)$ i -го игрока подынтегральной функции. Функционал $S_i(\cdot)$ из (5) назовем действием по Гамильтону [3] i -го игрока.

Из условий

$$\prod_i (t, x(t), u_1(t), \dots, u_N(t), \psi(t)) = h_i(t, x(t), u_1(t), \dots, u_N(t)) + \\ + \psi_i(t) f(t, x(t), u_1(t), \dots, u_N(t)), \quad i = \overline{1, N}; \quad (6)$$

$$\prod_i (t, x^p(t), u^p(t), \psi_i(t)) = \max_{u_i(t) \in U_i(t)} \prod_i (t, x^p(t), u^p(t) \| u_i(t), \psi_i(t))$$

и (6) следует, что на ситуации равновесия $u^p(\cdot)$ и соответствующей равновесной траектории $x^p(\cdot)$ существуют такие функции $\psi_i(\cdot)$, $i = \overline{1, N}$, для которых верно соотношение

$$S_i^{u^p(\cdot)}(x^p(\cdot), x^p(\cdot), \psi_i(\cdot)) = S_i(x^p(\cdot), u^p(\cdot) / u_i(\cdot), \psi_i(\cdot)), \quad i = \overline{1, N}$$

Учитывая последнее равенство, вариация действия $S_i(\cdot)$ из (5) в ситуации равновесия по фазовой переменной и вариация по сопряженным переменным $\psi_i(t)$, $i = \overline{1, N}$, приводят к системе уравнений Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial H_i(t, x^p(t), u^p(t) \| u_i(t), \psi_i(t))}{\partial x}, & i = \overline{1, N} \\ \dot{x}(t) = -\frac{\partial H_i(t, x^p(t), u^p(t) \| u_i(t), \psi_i(t))}{\partial \psi_i}, & i = \overline{1, N} \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{Здесь } \frac{\partial H_i(\cdot)}{\partial x} = \frac{\partial H_i}{\partial x^{(1)}}, \dots, \frac{\partial H_i}{\partial x^{(n)}}, \frac{\partial H_i(\cdot)}{\partial \psi} = \frac{\partial H_i}{\partial \psi^{(1)}}, \dots, \frac{\partial H_i}{\partial \psi^{(n)}}.$$

Система уравнений (7) не содержит управления i -го игрока $u_i(t)$ и является аналогом Гамильтоновых систем в механике [6;7].

Введем обозначение

$$L_i(t, x(t), \dot{x}(t), u(t) / u_i(t), \psi_i(t)) = H_i(t, x(t), u(t) / u_i(t), \psi_i(t)) - \psi_i(t) \dot{x}(t), \quad i = \overline{1, N}. \quad (8)$$

Здесь функция $L_i(*)$ является аналогом функции Лагранжа (лагранжиан) i -го игрока [6;7]. Учитывая определение функции Лагранжа (8), дадим определение функции Гамильтона в виде:

$$H_i(*) = L_i(*) + \psi_i(t)\dot{x}(t), \quad i = \overline{1, N}.$$

Из (6) и (3) следует, что функции $L_i(*)$ из (8) можно представить в виде:

$$L_i(*) = \max_{u_i(t) \in U_i(t)} L_i^{u_i(t)}(*), \quad i = \overline{1, N},$$

где $L_i^{u_i(t)}(t, x(t), \dot{x}(t), u(t), \psi_i(t)) = H_i(t, x(t), u(t)) + \psi_i(t)(f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t))$, $i = \overline{1, N}$,

В выражениях для $L_i(*)$, $L_i^{u_i(t)}(*)$, когда функция $\psi_i(t)$ фиксирована, будем считать функции $L_i(*)$, $L_i^{u_i(t)}(*)$ зависящими соответственно только от $(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)/u_i(t))$ и $(t, x(t), \dot{x}(t), u(t))$.

Из определения $L_i(*)$ (8) имеем, что

$$\frac{\partial L_i(*)}{\partial x} = \frac{\partial H_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial L_i(*)}{\partial x} = -\psi_i(t), \quad i = \overline{1, N},$$

$$\frac{\partial L_i(*)}{\partial x} = \left(\frac{\partial L_i}{\partial x^{(1)}}, \dots, \frac{\partial L_i}{\partial x^{(n)}} \right), \quad \frac{\partial L_i(*)}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L_i}{\partial \dot{x}^{(1)}}, \dots, \frac{\partial L_i}{\partial \dot{x}^{(n)}}.$$

Откуда из (7) следует, что для ситуации равновесия и соответствующей равновесной траектории имеет место система управлений:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_i(t, x^p(t), \dot{x}^p(t), u^p(t)/u_i(t))}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L_i(t, x^p(t), \dot{x}^p(t), u^p(t)/u_i(t))}{\partial x} = 0, \quad i = \overline{1, N},$$

В точках τ , $k = \overline{1, s}$ излома экстремалей функции $L_i(*)$ удовлетворяют условиям Вейерштрасса-Эрдмана [5], вида:

$$\left. \frac{\partial L_i(*)}{\partial \dot{x}} \right|_{t=\tau_k-0} - \left. \frac{\partial L_i(*)}{\partial \dot{x}} \right|_{t=\tau_k+0} = 0, \quad k = \overline{1, s}, \quad (9)$$

$$\left(L_i(*) - \frac{\partial L_i(*)}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right) \Big|_{t=\tau_k-0} - \left(L_i(*) - \frac{\partial L_i(*)}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right) \Big|_{t=\tau_k+0} = 0, \quad k = \overline{1, s} \quad (10)$$

Условие (10) перепишем в виде:

$$L_i(*) \Big|_{\tau_k-0} - L_i(*) \Big|_{\tau_k+0} = \frac{\partial L_i(*)}{\partial \dot{x}} \Big|_{\tau_k+0}, \quad k = \overline{1, s},$$

оно показывает, что касательные в точках $\dot{x}(\tau_k-0)$ и $\dot{x}(\tau_k+0)$, $k = \overline{1, s}$ не только параллельны, а даже совпадают.

Для канонических переменных [8;9]

$$\psi_i(t) = -\frac{\partial L_i(*)}{\partial \dot{x}}, \quad H_i(*) = L_i(*) - \frac{\partial L_i(*)}{\partial \dot{x}} \dot{x}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Определим на ситуации равновесия $(u_1(\cdot), \dots, u_i(\cdot), \dots, u_N(\cdot))$ вдоль соответствующей равновесной траектории $x(\cdot)$ функцию действия $S_i(t, x)$, $(i = \overline{1, N})$, которая зависит от значения фазовой переменной $x = x(t)$, выбранного как начальное состояние системы, соответствующего некоторому моменту времени t [10;11]:

$$S_i(t, x) = g_i(x(t_f)) + \int_t^{t_f} \max_{u_i(\tau) \in U_i(\tau)} [h_i(\tau, x(\tau), u(\tau)) + \psi_i(\tau)(f(\tau, x(\tau), u(\tau)) - \dot{x}(\tau))] d\tau, \quad i = \overline{1, N}. \quad (11)$$

Запишем выражение (11) через лагранжиан $L_i(*)$ (8).

$$S_i(t, x) = g_i(x(t_f)) + \int_t^{t_f} L_i(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau), u(\tau)/u_i(\tau)) d\tau, \quad i = \overline{1, N}. \quad (12)$$

Отметим, что в нашей задаче функции (4) характеризуют движение системы по равновесным траекториям. В дальнейших рассуждениях будем считать $S_i(t, x)$ из (12) гладкой функцией. Использование в точках её излома условий Вейерштрасса – Эрдмана [5, 13] позволяет распространить их на общий случай.

Докажем, что функция $S_i(t, x)$ из (12) удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби в частных производных, т.е. является главной функцией Гамильтона [10;11] i -го участника, $(i = \overline{1, N})$. Действительно, вариация функции (12) по фазовой переменной в момент времени t имеет вид:

$$\delta_x S_i(t, x) = \frac{\partial g_i(x(t_f))}{\partial x} \delta x(t_f) - \int_t^{t_f} \left(\frac{\partial L_i(*)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L_i(*)}{\partial \dot{x}} \right) \delta x d\tau - \frac{\partial L_i(*)}{\partial \dot{x}} \delta x(t) + \frac{\partial L_i(*)}{\partial \dot{x}} \delta x(t_f). \quad (13)$$

Здесь символ $(*)$ обозначает аргумент функции (функционала, теоретико-множественного отображения).

Введем обозначение аналогично [2, 12]:

$$\psi_i(t) = \frac{\partial L_i(*)}{\partial \dot{x}}, \quad t \in [t_0, t_f], \quad i = \overline{1, N}. \quad (14)$$

Функции $S_i(t, x)$ из (12) определены на ситуациях равновесия вдоль равновесных траекторий, поэтому для каждого участника справедливы уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_i(t, x^p(t), \dot{x}^p(t), u^p(t)/u_i(t))}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L_i(t, x^p(t), \dot{x}^p(t), u^p(t)/u_i(t))}{\partial x} = 0, \quad i = \overline{1, N},$$

и в (13) интегральный член обращается в нуль. С учетом обозначения (14) соотношение (13) перейдет в следующее:

$$\delta_x S_i(t, x) = \left[\frac{\partial g_i(x(t_f))}{\partial x} - \psi_i(t_f) \right] \delta x(t_f) + \psi_i(t) \delta x(t), \quad i = \overline{1, N}. \quad (15)$$

Выбирая сопряженные переменные $\psi_i(t)$, $i = \overline{1, N}$, таким образом, чтобы любые малые вариации равновесных значений, освобожденных от связей x , «не улучшали» бы функционала

$$S_i^{u_i(\cdot)}(*) = g_i(x(t_f)) - \psi_i(t)x(t)\Big|_{t_0}^{t_f} + \\ + S_{t_0}^{t_f} [\dot{\psi}_i(t)x(t) + h_i(t, x(t), u_1(t), \dots, u_N(t)) + \\ + \psi_i(t)f(t, x(t), u_1(t), \dots, u_N(t))]dt, \quad i = \overline{1, N}.$$

граничные условия для сопряженной переменной $\psi_i(t)$, i -го игрока получаются:

$$\psi_i(t_f) = -\frac{\partial g_i(x(t_f))}{\partial x}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (16)$$

Из соотношений (15) и (16) получаем:

$$\psi_i(t) = -\frac{\partial S_i(t, x)}{\partial x}, \quad t \in [t_0, t_f], \quad i = \overline{1, N}. \quad (17)$$

Из определения (12) полная производная по времени функции $S_i(t, x)$:

$$\frac{dS_i(t, x)}{dt} = -L_i(*), \quad i = \overline{1, N}.$$

С другой стороны, рассматривая (12) как функцию переменных $x = x(t)$ и t , используя соотношение (17), имеем:

$$\frac{dS_i(t, x)}{dt} = \frac{\partial S_i(t, x)}{\partial t} + \psi_i(t)\dot{x}(t), \quad t \in T, \quad i = \overline{1, N}.$$

Окончательно получим

$$\frac{\partial S_i(t, x)}{\partial t} + \psi_i(t)\dot{x}(t) + L_i(*) = 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (18)$$

Откуда с учетом (17) и

$$L_i(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)/u_i(t), \psi_i(t)) = H_i(t, x(t), u(t)/u_i(t), \psi_i(t)) - \psi_i(t)\dot{x}(t), \quad i = \overline{1, N}$$

следует

$$\frac{\partial S_i(t, x)}{\partial t} + H_i(*) = 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

Используя определение функции Гамильтона $H_i(*)$ (3), представим последнее уравнение в виде:

$$\frac{\partial S_i(t, x)}{\partial t} + \max_{u_i(\tau) \in \Theta_i(\tau)} \prod_i(t, x(t), u(t)/u_i(t), \psi_i(t)) = 0, \quad i = \overline{1, N},$$

где функции Понтрягина определены в виде:

$$\prod_i(t, x(t), u_1(t), \dots, u_N(t), \psi_i(t)) = \\ h_i(t, x(t), u_1(t), \dots, u_N(t)) + \psi_i(t)f(t, x(t), u_1(t), \dots, u_N(t)), \quad i = \overline{1, N}$$

С учетом (17) из (18) окончательно получим уравнение

$$\frac{\partial S_i(t, x)}{\partial t} + \max_{u_i(\tau) \in \Theta_i(\tau)} \left[\frac{\partial S_i(t, x)}{\partial t} f(t, x(t), u(t)/u_i(t)) + h_i(t, x(t), u(t)/u_i(t)) \right] = 0, \quad (19),$$

которое является аналогом уравнения Гамильтона-Якоби для i -го участника ($i = \overline{1, N}$).

Граничное условие для $S_i(t, x)$ следует при $t = t_f$ из (12):

$$S_i(t_f, x(t_f)) = g_i(x(t_f)), \quad i = \overline{1, N}. \quad (20)$$

Результаты исследования. Уравнения Гамильтона-Якоби (19) являются и достаточными условиями существования ситуации равновесия для дифференциальной игры (1) – (5), т.е. справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Для того чтобы ситуация $u^p(\cdot) = (u_1^p(\cdot), \dots, u_N^p(\cdot))$, $u^p(\cdot) \rightarrow x^p(\cdot)$ являлась ситуацией равновесия в игре (1) – (5), достаточно, чтобы существовало гладкое решение уравнения (9) с граничным условием (10), а стратегия $u_i^p(\cdot)$ i -го участника в каждый момент времени t удовлетворяла условию

$$\frac{\partial S_i(t, x^p(t))}{\partial \dot{x}} f(t, x^p(t), u^p(t)) + h_i(t, x^p(t), u^p(t)) = \\ = \max_{u_i(\tau) \in \Theta_i(\tau)} \left[\frac{\partial S_i(t, x^p(t))}{\partial t} f(t, x^p(t), u^p(t)/u_i(t)) + h_i(t, x^p(t), u^p(t)/u_i(t)) \right]. \quad (21)$$

Доказательство. Для управления $u^p(\cdot) = (u_1^p(\cdot), \dots, u_N^p(\cdot))$ в каждой точке t его непрерывности в силу определения функции Гамильтона и условий Вейерштрасса Эрдмана на траектории $x^p(\cdot)$ имеем:

$$\frac{dS_i(t, x^p(t))}{dt} = \frac{\partial S_i(t, x^p(t))}{\partial t} + \frac{\partial S_i(t, x^p(t))}{\partial x} f(t, x^p(t), u^p(t)/u_i(t)) = \\ = -h_i(t, x^p(t), u^p(t)/u_i(t)), \quad i = \overline{1, N}.$$

Интегрируя вдоль $x^p(\cdot)$, получим

$$S_i(t_f, x^p(t_f)) - S_i(t_0, x^p(t_0)) = - \int_{t_0}^{t_f} h_i(t, x^p(t), u^p(t)/u_i(t)) dt, \quad i = \overline{1, N},$$

или с учетом (10):

$$S_i(t_0, x^p(t_0)) = J_i(u^p(\cdot)/u_i^p(\cdot)), \quad i = \overline{1, N},$$

Где $J_i(u(\cdot))$ – выигрыша i -го участника в дифференциальной игре [1], $i = \overline{1, N}$.

Пусть $\tilde{u}_i(\cdot)$, $i = \overline{1, N}$ – другое допустимое управление i -го участника в игре [1], а $\tilde{x}_i(\cdot)$ – соответствующая траектория $(u^p(\cdot)/\tilde{u}_i(\cdot)) \rightarrow \tilde{x}_i(\cdot)$. Для них в силу (21) имеем

$$\frac{dS_i(t, \tilde{x}(t))}{dt} + h_i(t, \tilde{x}(t), u^p(t)/\tilde{u}_i(t)) =$$

$$\frac{\partial S_i(t, \tilde{x}(t))}{\partial t} + \frac{\partial S_i(t, \tilde{x}(t))}{\partial x} f(t, \tilde{x}(t), u^p(t) // \tilde{u}_i(t)) + h_i(t, \tilde{x}(t), u^p(t) // \tilde{u}_i(t)) \leq$$

$$\frac{\partial S_i(t, \tilde{x}(t))}{\partial t} + \max_{u_i(\tau) \in \partial_i(\tau)} \left[\frac{\partial S_i(t, \tilde{x}(t))}{\partial x} f(t, \tilde{x}(t), u^p(t) // \tilde{u}_i(t)) + h_i(t, \tilde{x}(t), u^p(t) // \tilde{u}_i(t)) \right] = 0,$$

$$i = \overline{1, N}$$

Интегрируя вдоль $\tilde{x}(t)$, получаем:

$$S_i(t_f, \tilde{x}(t_f)) - S_i(t_0, \tilde{x}(t_0)) = - \int_{t_0}^{t_f} h_i(t, \tilde{x}(t), u^p(t) // \tilde{u}_i(t)) dt \leq 0,$$

что в силу (2), (20), эквивалентно:

$$S_i(t_0, \tilde{x}(t_0)) \geq J_i(u^p(\cdot) // u_i^p(\cdot)), \quad i = \overline{1, N}.$$

Сравнивая полученное неравенство с (12), имеем:

$$J_i(u^p(\cdot)) \geq J_i(u^p(\cdot) // u_i^p(\cdot)), \quad i = \overline{1, N}.$$

Таким образом, $u^p(\cdot) = (u_i^p(\cdot), i = \overline{1, N})$ является ситуацией равновесия, а соответственно траектория $x^p(\cdot)$ – равновесная в игре [1].

Замечание. Используя необходимые [1] и полученные выше достаточные условия, можно строить методы нахождения ситуации равновесия в бескоалиционных дифференциальных играх.

$$\text{Пусть функции } u_i^p = \varphi_i \left(x, x(t), \frac{\partial S_i(t, x)}{\partial x}, u^p(t) / u_i(t) \right), \quad i = \overline{1, N},$$

$$\text{Здесь } \frac{\partial S_i(t, x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial S_i(t, x)}{\partial x^{(1)}}, \dots, \frac{\partial S_i(t, x)}{\partial x^{(n)}} \right),$$

найденны из условий

$$\frac{\partial S_i(t, x)}{\partial x} f \left(t, x(t), u^p(t) // \varphi_i \left(t, x(t), \frac{\partial S_i(t, x)}{\partial x}, u^p(t) / u_i(t) \right) \right) +$$

$$+ h_i \left(t, x(t), u^p(t) // \varphi_i \left(t, x(t), \frac{\partial S_i(t, x)}{\partial x}, u^p(t) / u_i(t) \right) \right) =$$

$$= \max_{u_i(\tau) \in \partial_i(\tau)} \left[\frac{\partial S_i(t, x)}{\partial x} f(t, x(t), u^p(t) // u_i(t)) + h_i(t, x(t), u^p(t) // u_i(t)) \right].$$

Система $u_i^p = \varphi_i \left(x, x(t), \frac{\partial S_i(t, x)}{\partial x}, u^p(t) / u_i(t) \right), \quad i = \overline{1, N}$ представляет собой систему N уравнений относительно равновесных стратегий игроков $u_i^p(\cdot), i = \overline{1, N}$. Если существует решение данной системы в классе допустимых стратегий, то, решив ее, получим:

$$u_i^p = \chi_i \left(x, x(t), \frac{\partial S_i(t, x)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial S_N(t, x)}{\partial x} \right), \quad i = \overline{1, N}, \quad (22)$$

Подставляя найденное значение равновесной стратегии в уравнение (19), получаем систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно функции $S_i(t, x), i = \overline{1, N}$:

$$\frac{\partial S_i(t, x)}{\partial x} + \frac{\partial S_i(t, x)}{\partial x} f \left(t, x(t), \chi_i \left(t, x(t), \frac{\partial S_i(t, x)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial S_N(t, x)}{\partial x} \right) \right) +$$

$$+ h_i \left(t, x(t), \chi_i \left(t, x(t), \frac{\partial S_i(t, x)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial S_N(t, x)}{\partial x} \right) \right) = 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

Если существует N различных функций $S_i(t, x)$, которые удовлетворяют системе (22) с граничными условиями (20), то решение игры определено полностью. В самом деле, подставив полученные функции $S_i(t, x), i = \overline{1, N}$ в равенство (22), получаем равновесные стратегии вида:

$$u_i^p(t) = u_i^p(t, x), \quad i = \overline{1, N},$$

Как функции координат и времени. Пусть стратегии $u_i^p(t) = u_i^p(t, x), i = \overline{1, N}$ порождают единственную траекторию $x^p(t)$ системы (1) при начальном условии (2), определенную на отрезке $[t_0, t_f]$, вдоль которой функции $u_i^p(t) = u_i^p(t, x^p(t)), i = \overline{1, N}$, – кусочно-непрерывны. Тогда стратегия $u_i^p(t) = u_i^p, i = \overline{1, N}$, является ситуацией равновесия в игре [1].

Заключение. Из полученных результатов можно сделать вывод: методы аналитической механики являются общими, едиными для изучения движения и равновесия, которые применимы для различных материальных систем [14,15]. Так, с помощью принципов аналитической механики, мы выразили достаточные условия существования ситуации равновесия в бескоалиционной дифференциальной игре лиц через уравнения движения в форме Гамильтона – Якоби.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Махмудова Ш.Д. Главная функция Гамильтона и необходимые условия существования ситуации равновесия в форме уравнений Гамильтона-Якоби/ Ш.Д.Махмудова, А.Н.Уразгайиева// Вестник КазНПУ им.Абая – 2021. – №1. – С. 31.
- 2 Иванилов Ю.П. Применимость методов аналитической механики в оптимальном управлении// Изв.АН СССР. Техническая кибернетика. – 1983. – №2. – С. 61-71.
- 3 Иванилов Ю.П. Принцип освобождения от связей в форме штрафных функций/ Ю.П. Иванилов// Изв.АН СССР. Техническая кибернетика. – 1985. – №3. – С. 170-178.
- 4 Иванилов Ю.П. Главная функция Гамильтона и условия оптимальности/ Ю.П. Иванилов// Автоматика и телемеханика. – 1988. – №5. – С. 51-61.
- 5 Гельфанд И.М. Вариационное исчисление/ И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. – М.: Физматгиз, 1961. – 228 с.

- 6 Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики в 2-х т. Т.2. / Н.Н. Бухгольц. – М.: Лань, 2009. – 400 с.
- 7 Голдстейн Г. Классическая механика / Г.Голдстейн. – М.: Наука, 1975. – 408 с.
- 8 Воробьев Н.Н. Теория игр. – М.: Наука, 1985. – 408 с.
- 9 Жуковский В.И. О дифференциальных играх нескольких лиц с ненулевой суммой // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1971. № 3. С. 3 – 13.
- 10 Разумихин Б.С. Физические модели и методы теории равновесия в программировании и экономике. – М.: Наука, 1975. – 304 с.
- 11 Мкртычев, О.В. Теоретическая механика: Уч. / О.В. Мкртычев. – М.: Вузовский учебник, 2019. – 320 с.
- 12 Гордин В. А. Дифференциальные и разностные уравнения. Какие явления они описывают и как их решить / В. А.Гордин – М.: Учебники Высшей школы экономики, 2016. – 235 с.
- 13 Зеликин, М.И. Оптимальное управление и вариационное исчисление / М.И. Зеликин. – М.: Ленанд, 2017. – 160 с.
- 14 Ландау, Л.Д. Теоретическая физика в 10 томах. т.1. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. – М.: Физматлит, 2018. – 224 с.
- 15 Бертяев, В.Д. Теоретическая и аналитическая механика. Учебно-исследовательская работа студентов: Учебное пособие / В.Д. Бертяев, В.С. Ручинский. – СПб.: Лань, 2019. – 424 с.

REFERENCES

- 1 Makhmudova, Sh.D. (2021). Osnovnaya funktsiya Gamil'tona i neobkhodimyye usloviya sushchestvovaniya situatsii ravnovesiya v vide uravneniy Gamil'tona-Yakobi [Hamilton's principal function. Necessary conditions for the existence of equilibrium in the form of hamilton-jacobi equations] Vestnik KazNPU imeni Abaya [in Russian].
- 2 Ivanilov, Ju.P. (1983). Primenimost' metodov analiticheskoy mehaniki v optimal'nom upravlenii [Applicability of analytical mechanics methods in optimal control]. Izv.AN SSSR. Tehnicheskaja kibernetika[in Russian].
- 3 Ivanilov, Ju.P. (1985). Princip osvoboždeniya ot svyazej v forme shtrafnih funkcij [The principle of freeing from bonds in the form of penalty functions]. Izv.AN SSSR. Tehnicheskaja kibernetika [in Russian].
- 4 Ivanilov, Ju.P. (1988). Glavnaja funkciya Gamil'tona i uslovija optimal'nosti [The main Hamilton function and optimality conditions]. Avtomatika i telemekhanika. [in Russian].
- 5 Gel'fand, I.M., & Fomin, S.V. (1961). Variacionnoe isчисление [Calculus of variation]. M.: Fizmatgiz [in Russian].
- 6 Buhgol'c, N.N. (1969). Osnovnoj kurs teoreticheskoy mehaniki [Basic Course in Theoretical Mechanics]. V.2. (Vols. 1-2). M.:Nauka [in Russian].
- 7 Goldstejn, G. (1975). Klassicheskaja mehanika [Classic mechanics]. M.: Nauka [in Russian].
- 8 Vorob'ev N.N. (1985) Teoriya igr. [Game theory]. M.: Nauka [in Russian].
- 9 Zhukovskij V.I. (1971) O differencial'nyh igrach neskol'kih lic s nenulevoj summoj [On differential games of several players with nonzero sum] Tehnicheskaja kibernetika Izv. AN SSSR [in Russian].
- 10 Razumihin B.S. (1975) Fizicheskie modeli i metody teorii ravnovesija v programirovanii i jekonomike [Physical models and methods of equilibrium theory in programming and economics]. M.: Nauka [in Russian].
- 11 Mkrtychev O.V. (2019). Teoreticheskaja mehanika[Theoretical mechanics]. M.: Vuzovskij učebnik. [in Russian].

- 12 Gordin V. A. (2016). Differencial'nye i raznostnye uravnenija. Kakie javlenija oni opisывajut i kak ih reshit [Differential and difference equations. What phenomena do they describe and how to solve them]. M.: Uchebniki Vysšej shkoly jekonomiki. [in Russian].
- 13 Zelikin M.I. (2017). Optimal'noe upravlenie i variacionnoe isчисление [Optimal control and calculus of variations]. M.: Lenand. [in Russian].
- 14 Landau L.D. & Livshic E.M. (2018). Teoreticheskaja fizika v 10 tomah. t.1. Mehanika [Theoretical physics in 10 volumes] V.I. M.: Fizmatlit. [in Russian].
- 15 Bertjaev V.D. & Ruchinskij V.S. (2019). Teoreticheskaja i analiticheskaja mehanika. Uchebno-issledovatel'skaja rabota studentov: Uchebnoe posobie [Theoretical and analytical mechanics. Educational and research work of students: Textbook]. SPb.: Lan. [in Russian].

**Ш. Д. МАХМУДОВА¹, А. Д. МАХМУДОВ²,
А. Н. УРАЗГАЛИЕВА¹**

¹Жәңгір хан атындағы Батыс Қазақстан аграрлық-техникалық университеті,
Орал қаласы, Қазақстан

²Батыс Қазақстан инновациялық-технологиялық университеті,
Орал қаласы, Қазақстан

ТЕПЕ-ТЕҢДІК ЖАҒДАЙДЫҢ БАР БОЛУЫНЫҢ ГАМИЛЬТОН-ЯКОБИ ТЕҢДЕУЛЕРІ ТҮРІНДЕГІ ЖЕТКІЛІКТІ ШАРТТАРЫ

Мақалада фазалық шектеулері бар Гамильтон-Якоби теңдеулерін шешу үшін оңтайлы басқару теориясын қолдану қарастырылады.

Оңтайлы басқару есептерін қолдана отырып, жалпыланған шешімдерді құру әдісі ұсынылған. Сандық эксперименттердің нәтижелері мен талдауы, бірнеше тұлғалардың ынтымақтастығы жоқ дифференциалдық ойындарындағы тепе-теңдік жағдайларының болуының шарттары, атап айтқанда, Гамильтон бойынша әрекетті анықтайтын бірнеше тұлғаның бірлескен емес дифференциалдық ойындарындағы тепе-теңдік жағдайларының Гамильтон-Якоби теңдеулері түріндегі болу шарттары алынған.

Ойын теориясы қолданбалы математикалық теория ретінде, адамдар шешім қабылдаған кезде қолданылатын механизмдерді түсіну және түсіндіру үшін қолданылады. Теория стратегиялық жоспарлау логикасы мен адамдар арасындағы қарым-қатынастың қызмет етуіне ықпал етеді. Ойын теориясы қолданбалы математика әдісі ретінде әртүрлі жағдайларда әрекетті зерттеу үшін қолданылады, экономикалық субъекттердің әрекетін түсінуге көмектеседі.

Теорияның көптеген қолданбалары бар және стратегиялық ойындар, әкімшілік саласы, экономика және жасанды элементті зерттеу сияқты әртүрлі салаларда қолданылуы мүмкін. Мақалада ойын теориясындағы оңтайлы жағдайларды зерттеудің математикалық әдісі сипатталған.

Түйін сөздер: дифференциалдық ойын; динамикалық жүйелер; тепе-теңдік жағдайы; тепе-теңдік траекториясы; Гамильтон-Якоби функциясы; Эйлер-Лагранж теңдеулері; Вейерштрасс-Эрдман шарттары.

SH. D. MAKHMUDOVA¹, A. D. MAKHMUDOV², A. N. URAZGALIEVA¹¹Zhangir Khan West Kazakhstan agrarian-Technical university, Uralsk, Kazakhstan²West Kazakhstan Innovation and Technological University, Uralsk, Kazakhstan

SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE EXISTENCE OF EQUILIBRIUM IN THE FORM OF HAMILTON-JACOBI EQUATIONS

The article discusses the application of the theory of optimal control for solving Hamilton-Jacob equations with phase constraints.

A method for constructing generalized solutions using optimal control problems is proposed. The results and analysis of numerical experiments, conditions for the existence of equilibrium situations in noncooperative differential games of several persons, namely the conditions for the existence of equilibrium situations in noncooperative differential games of several persons, defining the action according to Hamilton, are stated. Necessary conditions in the form of Hamilton-Jacobi equations are obtained.

Game theory as an applied mathematical theory is used to understand and explain the mechanisms that are used when people make decisions. The theory contributes to the functioning of the logic of strategic planning and the relationship between individuals. Game theory as a method of applied mathematics is used for behavioral studies in various conditions, and helps understand the behavior of economic agents.

The theory has many applications and can be used in different areas such as: strategy games, administration, economics and artificial intelligence research. The article describes a mathematical method for studying optimal situations in game theory.

Key words: Differential game; dynamic systems; equilibrium situation; equilibrium trajectory; Hamilton-Jacobi function; Euler-Lagrange equations; Weierstrass-Erdmann conditions.

УДК 550.81

<https://doi.org/10.47533/2020.1606-146X.143>Б. Б. ОРАЗБАЕВ¹, И. ИСА^{1*}, Н. Г. ДЖУМАМУХАМБЕТОВ², Б. Е. УТЕНОВА³,
А. А. СЕЙДАЛИЕВ⁴, Г. Ж. ШУЙТЕНОВ⁵¹Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева,
г. Нур-Султан, Казахстан²Казахский университет технологии и бизнеса, г. Нур-Султан, Казахстан³Атырауский университет нефти и газа им. Утебаева, г. Атырау, Казахстан⁴Каспийский государственный университет технологий и инжиниринга имени
Ш. Есенова, г. Актау, Казахстан⁵Казахский университет экономики, финансов и международной торговли,
г. Нур-Султан, КазахстанПОСТРОЕНИЕ ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
МОДЕЛЕЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕФТЯНОЙ ЗАЛЕЖИ
МЕСТОРОЖДЕНИЯ КЕНКИЯК

Исследованы и построены геологическая и математическая модели нефтяной залежи надсолевого месторождения Кенкияк. Предложено 6 типов геологических моделей и на основе этих моделей разработаны математические модели нефтяной залежи. Геологические модели построены на основе результатов исследований с учетом требований регулирования разработки месторождения Кенкияк, геологической характеристики месторождения и темпа эксплуатации. Математическая модель составлена на основе основных уравнений Дарси и включает уравнения сохранения массы и энергии, уравнения ограничения массы и нефтенасыщенности. Изучены вопросы моделирования и определения относительной проницаемости на конечной точке, приведены результаты определения параметров относительной проницаемости разных пластов при обычной и высокой температуре. Рассмотрены результаты идентификации параметров математических моделей.

Ключевые слова: геологическая модель, математическая модель, нефтяная залежь, надсолевое месторождение Кенкияк, теплодобывающая модель, нефтенасыщенность.

1. Введение. В настоящее время вопросы разработки моделей нефтяной залежи на месторождениях для проведения прогноза путем моделирования и определения оптимальной схемы и технологии разработки нефтяных месторождений являются весьма актуальной задачей нефтяной науки и экономики [1 – 4]. При моделировании процессов разработки нефтяных месторождений для анализа процессов, происходящих в продуктивных пластовых системах, применяют все различные модели, концепции и средства математического моделирования. В узком смысле термин «моделирование нефтяных залежей, пластов» означает только моделирование гидродинамики потоков в пласте. В широком смысле данный термин характеризует моделирование полного процесса нефтедобычи и связанную с этим деятельность человека [5].

Математическое моделирование нефтяных залежей позволяет решать следующие важные задачи для разработки нефтяных месторождений [6]:

– оконтуривания нефтяной залежи;

* E-mail корреспондирующего автора: issa.issamar@gmail.com