

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ АУЫЛ ШАРУАШЫЛЫҒЫ МИНИСТРЛІГІ



ZHANGIR KHAN
UNIVERSITY

**Жәңгір хан атындағы Батыс Қазақстан
аграрлық-техникалық университеті**

А.Х.Вахитова, А.А.Гумарова

КОМПЬЮТЕРЛІК МОДЕЛЬДЕУ

Оқу құралы

Орал

2022

ӘОЖ 004.414.73(075.8)

КБЖ 32.973В6

В22

**Жәңгір хан атындағы Батыс Қазақстан аграрлық-техникалық
университетінің Оқу-әдістемелік кеңесімен басылымға ұсынылған
(№6 хаттама, 20.01.2022 ж.)**

Сын-пікір берушілер: **Кушеккалиев А.Н.**, физ.-мат.ғ.к., доцент,
М.Өтемісов атындағы БҚУ
Камалова Г.А., физ.-мат.ғ.к., «Ақпараттық
технологиялар» жоғары мектебінің доценті,
Жәңгір хан атындағы БҚАТУ

Вахитова А.Х.

В 22 Компьютерлік модельдеу: оқу құралы / А.Х.Вахитова, А.А.Гумарова.
– Орал: Жәңгір хан атындағы БҚАТУ, 2022. – 129 б.

ISBN 978-601-08-1802-6

Оқу құралында Mathcad жүйесі құралдарының жиі кездесетін математикалық есептерін шешудің теориялық мәліметтері мен мысалдары келтірілген. Оқу құралында тақырып бойынша теориялық материал, практикалық тапсырмалар мен өзіндік жұмыстарды ұйымдастыруға арналған тапсырмалар берілген.

Бұл оқу құралынан білім алушылар әртүрлі мақсаттағы жүйелер моделін құруды үйренеді, процестердің компьютерлік модельдерін жасауды және жобалауды игереді.

Оқу құралы жоғары оқу орындарының 5В070300 - «Ақпараттық жүйелер» мамандығының білім алушыларына, оқытушыларына арналады.

ӘОЖ 004.414.73(075.8)

КБЖ 32.973В6

ISBN 978-601-08-1802-6

© Вахитова А.Х., Гумарова А.А., 2022

© «Жәңгір хан атындағы Батыс Қазақстан
аграрлық-техникалық университеті» КеАҚ, 2022

МАЗМҰНЫ

Кіріспе.....	4
1-тақырып. Модель және модельдеу. Модельдеу – ғылыми таным әдісі.....	5
2-тақырып. Ақпараттық модельдеу.....	9
3-тақырып. Математикалық модельдеу.....	14
4-тақырып. Имитациялық модельдеу және оның технологиясы. Этаптары және түрлері.....	18
5-тақырып. Кездейсоқ процесстерді модельдеу. Монте-Карло әдісі. Монте- Карло әдісі көмегімен интегралдарды есептеу.....	23
6-тақырып. Кездейсоқ сандар генераторы.....	25
7-тақырып. Дискретті Марков процесстері.....	31
8-тақырып. Үзіліссіз Марков процесстері.....	36
9-тақырып. Инженерлік-экономикалық есептерді шешуде MathCad-ты пайдалану.....	40
10-тақырып. Интерполяция және корреляциялық-регрессиялық талдаулар.....	43
11-тақырып. Жаппай қызмет көрсету жүйелері.....	45
12 -тақырып. Бас тартумен берілген бірканалды ЖҚКЖ модельдеу.....	51
13-тақырып. Бас тартумен берілген көпканалды ЖҚКЖ модельдеу.....	53
14-тақырып. Кезекпен берілген көпканалды ЖҚКЖ модельдеу.....	56
15-тақырып. Күрделі ЖҚКЖ имитациялық модельдеу.....	60
Практикалық жұмыс 1. MathCad бағдарламасындағы қарапайым есептеулер.....	66
Практикалық жұмыс 2. MathCad бағдарламасындағы қарапайым операциялар.....	74
Практикалық жұмыс 3. Mathcad жүйесіндегі жұмыс негіздері.....	76
Практикалық жұмыс 4-5. Функциялар. Символдық операциялар.....	81
Практикалық жұмыс 6. Графиктерді құру.....	86
Практикалық жұмыс 7-8. Функция графигін тұрғызу.....	90
Практикалық жұмыс 9-10. Теңдеулерді шешу.....	95
Практикалық жұмыс 11-12. Векторлармен және матрицалармен операциялар.....	100
Практикалық жұмыс 13. Векторлар мен матрицаларды қолдану. Теңдеулер жүйелерін шешу	107
Практикалық жұмыс 14. Математикалық талдау есептерін шешудің мысалдары.....	117
	122

Практикалық жұмыс 15. Mathcad-та бағдарламалау.....	127
Пайдаланылған әдебиеттер тізімі.....	

КІРІСПЕ

Қазіргі таңда ғылымдар зерттеген күрделі жүйелердің компьютерлік модельдері адамзат прогресінің негізгі құрамдас бөлігі болып табылады. Ол қандай да бір объектінің жұмыс істеу ережесін түсінуге, оны басқаруды зерттеуге, ол жаңа жағдайларда қалай жұмыс атқаратынын түсінуге, нысанның жұмысын оңтайландыруға және тағы сол сияқты мақсаттарда пайдалануға болады. Сонымен қатар, модельдеу бірнеше себептер (қымбат бағадағы, денсаулыққа қауіпті, өте үлкен немесе кіші нысандар, жылдам немесе баяу процестер) бойынша шынайы тәжірибе алуға болмайтын объектілерге зерттеу жүргізуге мүмкіндік береді. Сондай-ақ, модельдеу тіпті жоқ нысандарды зерттеуге ықтималдық тудырады. Мысалы, модельдеу жаңа ұшу аппараттарын құрастыру кезінде кең қолданылады.

Модельдеуде жиі қолданысқа ие болған бағдарламалық ортаның бірі «MathCAD» жүйесіне тоқталып өтелік. MathCAD жүйесі ғылыми ортаға қарағанда, инженерлік ортада кең қолданыс тапқан. Жүйенің өзіндік ерекшелігі – қалыпты стандартты математикалық сипаттауларды пайдалануға мүмкіндік береді, яғни жүйедегі есептеулер дәл қарапайым математикалық есептеу жүргізілгендей болып табылады. MathCAD пакетін қолдану үшін қандай да бір командалар жүйесін меңгеру талап етілмейді. Бұл жүйе негізінде, сандық есептеулер жүргізуге бағытталған, сонымен қатар аналитикалық түрлендіруді жүзеге асыруға мүмкіндік беретін функциялар қарастырылған. Соңғы нұсқаларында MathCAD құжаттарын Matlab құжаттарымен байланыстыру мүмкіндігі бар. MathCAD визуалды бағдарламалау ортасы болып табылады, яғни арнайы командалар жиіны жайлы білімді талап етеді. Бұл жүйенің оңай меңгерілуі, ұйымдастырылған интерфейсі, компьютер мүмкіншілігіне, кемшілігіне аса назар аудармаушылығының себебімен ол басқа математикалық жүйелерден айрықшаланады. Бұл оқу құралы білім алушыларды жобалау объектілерін математикалық модельдеуде қолданылатын MathCAD компьютерлік бағдарламасымен таныстыру, оның негізгі құралдарын игеру арқылы осы бағдарламалық құралмен жұмыс істеу дағдыларын алу мақсатында ұсынылып отыр.

Оқу құралында MathCAD жүйесі құралдарының жиі кездесетін математикалық есептерін шешудің теориялық мәліметтері мен мысалдары келтірілген. Математикалық, қолданбалы есептерді шешу, физика, экономика есептерін шешуге MathCAD пакетін қолдану тәсілдері беріліп, мысалдар мен өзіндік жұмыс тапсырмалары берілген.

1-тақырып. Модель және модельдеу. Модельдеу – ғылыми таным әдісі

1.1 Модель жөнінде түсінік. Модельдеу мақсаттары

Қоршаған әлемді зерттеу процесінде объективті шындықтың зерттелген бөлігі – таным объектісі білім тақырыбына қарсы тұрады. Ғалым танымның эмпирикалық әдістерін (бақылау және эксперимент) қолдана отырып, объектіні сипаттайтын фактілерді анықтайды. Қарапайым фактілер жалпыланады және эмпирикалық заңдар тұжырымдалады. Келесі қадам - теорияны дамыту және объектінің мінез-құлқын түсіндіретін және зерттелетін құбылысқа әсер ететін маңызды факторларды ескеретін теориялық модель құру. Бұл теориялық модель қисынды және белгіленген фактілерге сәйкес келуі керек. Кез-келген ғылым қоршаған шындықтың белгілі бір бөлігінің теориялық моделі деп санауға болады.

"Модель" сөзі латынның "modulus" сөзінен шыққан, "өлшеу", "үлгі" дегенді білдіреді. Оның бастапқы мағынасы құрылыс өнерімен байланысты болды және барлық дерлік еуропалық тілдерде ол басқа нәрсеге ұқсас бейнені немесе затты білдіру үшін қолданылды. Мысалы, ғимараттың, құрылыстың құрылысы алдында жобаны талқылау, жақсарту, мақұлдау үшін оның қысқартылған көшірмесі жасалды.

Ғылыми зерттеулердегі модельдеу ежелгі уақытта қолданыла бастады және біртіндеп ғылыми білімнің жаңа бағыттарын, атап айтқанда, техникалық дизайн, құрылыс және сәулет, астрономия, физика, химия, биология және, сайып келгенде, әлеуметтік ғылымдарды қызықтырды. Қазіргі ғылымның барлық салаларында үлкен жетістіктер мен тану XX ғасырды модельдеу әдісіне әкелді. Алайда, модельдеу әдіснамасын ұзақ уақыт бойы жеке ғылымдар бір-біріне тәуелсіз дамыды. Тұжырымдамалардың бірыңғай жүйесі, бірыңғай терминология болған жоқ. Модельдеудің ғылыми танымның әмбебап әдісі ретіндегі рөлі біртіндеп таныла бастады.

"Модель" термині адам қызметінің әртүрлі салаларында кеңінен қолданылады және көптеген семантикалық мағыналарға ие. Біз тек білім алу құралы болып табылатын модельдерді қарастырамыз.

Модель - бұл зерттелетін объектінің, процестің немесе құбылыстың маңызды ерекшеліктерін көрсететін жаңа объект. Ол материалдық немесе ақыл-ой, яғни ақпараттық, зерттеу барысында объектіні алмастыратын объект, оның маңызды ақпараттық қасиеттері бар (сапалық-логикалық

және сандық-математикалық), яғни зерттелетін объектінің элементтері мен оның физикалық шындықтың басқа объектілеріне қатынасы арасындағы қатынастардың сипаты, осылайша модельді зерттеу объект-түпнұсқа туралы жаңа білім береді. Неғұрлым қатаң түрде, іс жүзінде модель мақсатты жүйелерді (ақпараттық, энергетикалық, материалдық) көшіретін және соңғысының қасиеттерін зерттеуге арналған ақпараттық жүйенің бір түрі болып табылады. Нысан бойынша модель кез-келген физикалық ортада жүзеге асырылуы мүмкін: материалдық өнім, компьютерлік бағдарлама.

Модельдеу - модельдерді құру, зерттеу және қолдану процесі. Ол абстракция, ұқсастық, гипотеза және т.б. сияқты категориялармен тығыз байланысты. модельдеу процесі міндетті түрде абстракцияларды құруды, аналогия бойынша қорытынды жасауды және ғылыми гипотезаларды құруды қамтиды. Модельдеудің басты ерекшелігі-бұл алмастырғыш нысандарды қолдану арқылы таным әдісі.

1.2 Модельдеу түрлері. Жүйелік тәсіл

Пайдаланылған модельдер өте алуан түрлі. Жүйелік талдау жіктеуді және жүйелеуді, яғни объектілердің бастапқыда реттелмеген жиынтығын құрылымдауды және оны жүйеге айналдыруды қажет етеді. Модельдердің алуан түрлілігін жіктеудің әртүрлі әдістері белгілі. Сонымен, модельдердің келесі түрлері бөлінеді:

- 1) детерминалдық және стохастикалық;
- 2) статикалық және динамикалық;
- 3) дискретті, үздіксіз және дискретті-үздіксіз;
- 4) ақыл-ой және нақты.

Басқа жұмыстарда модельдер келесі негіздер бойынша жіктеледі:

- 1) объектінің модельденген жағының сипаты бойынша;
- 2) уақытқа қатысты;
- 3) жүйенің жай-күйін ұсыну тәсілі бойынша;
- 4) модельденетін процестің кездейсоқтық дәрежесі бойынша;
- 5) іске асыру тәсілі бойынша.

Объектінің модельденген жағының сипаты бойынша жіктеу кезінде модельдердің келесі түрлері бөлінеді:

1. *Кибернетикалық немесе функционалды модельдер*; оларда модельделген объект "қара жәшік" ретінде қарастырылады, оның ішкі құрылымы белгісіз. Мұндай "қара қораптың" әрекетін математикалық тендеумен, графикпен немесе құрылғының шығыс сигналдарын (реакцияларын) кіріс сигналдарымен (ынталандырулармен) байланыстыратын кестемен сипаттауға болады. Мұндай модельдің құрылымы мен

принциптері зерттелетін объектімен ешқандай байланысы жоқ, бірақ ол ұқсас жұмыс істейді. Мысалы, дойбы ойынын модельдейтін компьютерлік бағдарлама.

2. *Құрылымдық модельдер* - құрылымы модельденген объектінің құрылымына сәйкес келетін модельдер. Мысал ретінде командалық-штабтық жаттығулар, өзін-өзі басқару күні, Electronics Workbench-тегі электронды схема моделі және т.б.

3. Зерттелетін объектіні сипаттайтын арнайы таңдалған шамалар мен олардың нақты мәндерінің жиынтығы болып табылатын *ақпараттық модельдер*. Ауызша, кестелік, графикалық және математикалық ақпараттық модельдерді бөліңіз. Мысалы, студенттің ақпараттық моделі емтихандарға, бақылау және зертханалық жұмыстарға арналған бағалардан тұруы мүмкін. Немесе кейбір өндірістің ақпараттық моделі өндіріс қажеттіліктерін, оның маңызды сипаттамаларын, шығарылатын өнімнің параметрлерін сипаттайтын параметрлер жиынтығын білдіреді.

Уақытқа қатысты:

1. *Статикалық модельдер*-уақыт өте келе күйі өзгермейтін модельдер: квартал құрылысының макеті, машина корпусының моделі.

2. *Динамикалық модельдер*-күйі үнемі өзгеріп отыратын жұмыс істейтін нысандар. Оларға қозғалтқыш пен генератордың белсенді модельдері, популяцияны дамытудың компьютерлік моделі, компьютердің анимациялық моделі және т. б.

Жүйенің күйін көрсету әдісіне сәйкес:

1. *Дискретті модельдер*-бұл машиналар, яғни ішкі күйлердің белгілі бір жиынтығы бар нақты немесе қиялдағы дискретті құрылғылар, олар кіріс сигналдарын берілген ережелерге сәйкес Шығыс сигналдарына айналдырады.

2. *Үздіксіз модельдер*-бұл үздіксіз процестер жүретін модельдер. Мысалы, дифференциалдық теңдеуді шешу үшін аналогты компьютерді қолдану, радиоактивті ыдырауды резистор арқылы шығарылатын конденсатор арқылы модельдеу және т. б.

Модельденген процестің кездейсоқтық дәрежесі бойынша:

1. Қатаң алгоритмге сәйкес бір күйден екінші күйге ауысуға бейім *детерминистік модельдер*, яғни ішкі күй, кіріс және шығыс сигналдары арасында бір мәнді сәйкестік бар (бағдарламалық моделі).

2. Ықтималдық машиналары сияқты жұмыс істейтін *стохастикалық модельдер*; шығу сигналы және келесі сәтте күй ықтималдық матрицасымен беріледі. Мысалы, оқушының ықтималды моделі, шуылмен байланыс арнасы арқылы хабарлама жіберудің компьютерлік моделі және т. б.

Іске асыру әдісі бойынша:

1. *Абстракттілі модельдер*, яғни біздің қиялымызда бар ақыл-ой модельдері. Мысалы, блок-схеманың көмегімен ұсынылатын алгоритмнің

құрылымы, функционалдық тәуелділік, белгілі бір процесті сипаттайтын Дифференциалдық теңдеу. Абстрактілі модельдерге әртүрлі графикалық модельдер, схемалар, құрылымдар, сонымен қатар анимациялар кіреді.

2. *Материалдық (физикалық) модельдер*-бұл зерттелетін объект сияқты жұмыс істейтін тұрақты макеттер немесе жұмыс істейтін құрылғылар. Мысалы, шарлардың молекула моделі, атомдық сүңгуір қайықтың орналасуы, генератордың, қозғалтқыштың жұмыс істейтін моделі және т.б. нақты модельдеу объектінің материалдық моделін құруды және онымен бірқатар эксперименттер жүргізуді қамтиды. Мысалы, судағы сүңгуір қайықтың қозғалысын зерттеу үшін оның кішірейтілген көшірмесі жасалып, гидродинамикалық құбыр арқылы ток модельденеді.

Кесте 1. Модельдерді классификациялаудың әртүрлі жолдары

Модельдер классификациясы (жіктелуі):	1. Объектінің модельденген жағының сипаты бойынша	Кибернетикалық (функционалдық)
		Құрылымдық
		Ақпараттық
	2. Уақытқа қатысты	Статикалық
		Динамикалық
	3. Жүйенің күйін көрсету тәсілі бойынша	Дискретті
		Үзіліссіз
	4. Модельденген процестің кездейсоқтық дәрежесі бойынша	Детерминалдық
		Стохастикалық
	5. Іске асыру тәсілі бойынша	Абстрактілі (ой)
		Материалдық (физикалық)

1.3 Сапалық және сандық модельдер

Ғылымның міндеті-белгілі құбылыстарды түсіндіретін және болжайтын әлемнің теориялық моделін құру. Теориялық модель сапалы немесе сандық болуы мүмкін. Конденсатор мен индуктордан тұратын тербелмелі тізбектегі электромагниттік тербелістердің сапалы түсіндірмесін қарастырыңыз. Зарядталған конденсатор индукторға қосылған кезде ол зарядсыздандырыла бастайды, ток индуктор арқылы ағып, электр өрісінің энергиясы магнит өрісінің энергиясына өтеді. Конденсатор толығымен таусылғанда, индуктор арқылы өтетін ток максималды мәнге жетеді. Өздігінен индукция құбылысына байланысты индуктор катушкасының инерциясына байланысты конденсатор зарядталады, ол кері зарядталады және т. б. құбылыстың бұл сапалы моделі жүйенің әрекетін талдауға және болжауға мүмкіндік береді, мысалы, конденсатордың сыйымдылығы төмендеген кезде тізбектің

табиғи тербелістерінің жиілігі артады.

Таным жолындағы маңызды қадам-сапалық сипаттамалық әдістерден математикалық абстракцияларға көшу. Жаратылыстанудың көптеген мәселелерін шешу кеңістік пен уақытты цифрландыруды, координаталар жүйесі ұғымын енгізуді, әртүрлі физикалық, психологиялық, және басқа шамаларды өлшеу әдістерін әзірлеуді және жетілдіруді қажет етті, бұл сандық мәндермен жұмыс істеуге мүмкіндік берді. Нәтижесінде алгебралық және дифференциалдық теңдеулер жүйесін білдіретін өте күрделі математикалық модельдер алынды. Қазіргі уақытта табиғи және басқа құбылыстарды зерттеу енді сапалы дәлелдермен шектелмейді, бірақ математикалық теорияның құрылысын қарастырады.

2-тақырып. Ақпараттық модельдеу

2.1 Ақпараттық модель

Ақпараттық модельдер - әр түрлі сипаттағы жүйелердегі ақпараттық процестерді (ақпараттың пайда болуы, берілуі, түрленуі және қолданылуы) сипаттайтын таңбалы модельдер класы. Ауызша, математикалық және ақпараттық модельдер арасындағы шекара өте шартты түрде жасалуы мүмкін. Мүмкін ақпараттық модельдерді математикалық модельдердің қосалқы класы деп санау керек шығар. Алайда, информатика аясында математика, физика, Лингвистика және басқа ғылымдардан бөлек дербес ғылым ретінде ақпараттық модельдер класын бөлу орынды.

Ақпараттық модельдерді келесі класстарға бөлуге болады:

1.Формализация дәрежесі бойынша:

- формализацияланған;
- ішінара рәсімделген;
- бейресми.

2.Объектіні басқарудағы рөлі бойынша:

- тіркеу;
- эталондық;
- болжамдық;
- Имитациялық;
- оңтайландыру.

3.Уақытты есептеу факторы бойынша:

- статикалық;
- детерминалдық және ықтималдық (немесе стохастикалық) болып бөлінетін динамикалық.

Ескерту

Детерминистік жүйелерде жаңа күй тек жүйенің уақыты мен ағымдағы күйіне байланысты болады. Басқаша айтқанда, егер жүйенің

жаңа күйге ауысуын анықтайтын жағдайлар болса, онда детерминистік жүйе үшін оның қай күйге ауысатынын нақты көрсетуге болады. Стохастикалық жүйе үшін тек бірнеше мүмкін ауысу күйлерін және кейбір жағдайларда осы күйлердің әрқайсысына ауысудың ықтималды сипаттамаларын көрсетуге болады.

4. Кодтау тілі бойынша:

- сипаттамалық (табиғи немесе арнайы сипаттау тілдерінде);
- көрнекі, яғни ұсыну тілдерінде (суреттер, сызбалар, графиктер, диаграммалар);
- аралас (бағандар, кестелер, схемалар, карталар, бейнефильмдер және т.б.).

2.2 Ақпараттық модельдеудің негізгі түсініктері

Ақпараттық модельдеудің негізгі тәсілі объектілік тәсіл болды. Объектілі- бағытталған модельдеудің негізгі ұғымдарын тізімдейміз. Осы ақпараттық міндеттерді (ақпараттық модель құру контексті ретінде қызмет көрсететін) шешу үшін оның елеулі сипаттамаларының көмегімен нақты әлемнің көрсетілімін үлгі деп атауға болады. Бірдей сипаттамалары бар және бірдей ережелерге бағынатын көптеген үлгілер объект деп аталады.



Сурет 2.1. Ақпараттық модель құру кезіндегі абстракция мысалы

Осылайша, объект дегеніміз-жалпы сипаттамалары мен мінез-құлқымен біріктірілген нақты әлем объектілерінің абстракциясы (сурет. 2.1).

Кез келген нақты жүйенің ақпараттық моделі объектілерден тұрады. Модельдегі әрбір объект бірегей және маңызды атаумен қамтамасыз етілуі керек (сонымен қатар осы объектіні көрсету, оны модельдің басқа объектілерімен байланыстыру кілті ретінде қызмет ететін идентификатор). Осылайша, объектіні белгілеу (атауы) ақпараттық модельдеудің негізгі процедурасы болып табылады. Нысан нақты әлемдегі бір нәрсенің бір

типтік (бірақ белгісіз) данасы болып табылады және қарапайым ақпараттық модель болып табылады. Нысандар шешілетін тапсырмамен байланысты нақты әлем объектілерінің белгілі бір "мәнін" білдіреді. Класс-бұл ұқсас қасиеттері бар объектілер тобы, атап айтқанда мәліметтер мен мінез-құлық.

Мысал 2.1. Геометриялық фигуралар - класс; шеңбер - "геометриялық фигуралар" классының объектісі; нақты радиустың шеңбері - "геометриялық фигуралар" классының данасы.

Кездесетін объектілердің көпшілігі келесі санаттардың біріне жатады:

- нақты нысандар;
- рөлдер;
- оқиғалар;
- өзара әрекеттесу;
- ерекшеліктер.

Нақты объект - бұл физикалық бар заттардың абстракциясы. Мысалы, автомобиль зауытында бұл автомобиль корпусы, қозғалтқыш, беріліс қорабы; жүктерді тасымалдау кезінде бұл контейнер, тасымалдау құралы.

Рөл - адамның мақсатын немесе мақсатын, жабдықтың немесе мекеменің (ұйымның) бөлігін абстракциялау. Мысалы, университетте оқу орны ретінде ол студент, оқытушы, декан; университетте оқу орны ретінде қабылдау комиссиясы, кадрлар бөлімі, бухгалтерия, деканат.

Оқиға - бір нәрсенің абстракциясы. Мысалы, өтініш берушіден университеттің қабылдау комиссиясына түсу, емтихан тапсыру (немесе тапсырмау).

Өзара әрекеттесулер - басқа объектілер арасындағы қатынастардан алынған объектілер. Мысалы, мәміле, екі тарап арасындағы келісім-шарт (келісім-шарт), оқу орны өз түлегіне беретін білім туралы куәлік.

Техникалық сипаттама объектілері ережелерді, стандарттарды немесе сапа өлшемдерін ұсыну үшін қолданылады. Мысалы, информатика түлегінің білімі, дағдылары мен дағдыларының тізімі, пленканы көрсетуге арналған рецепт.

Әр объект үшін оның сипаттамасы болуы керек-объектінің данасы қандай да бір зат екенін немесе жоқтығын анықтауға мүмкіндік беретін қысқа ақпараттық мәлімдеме. Мысалы, "университет талапкері" объектісінің сипаттамасы келесідей болуы мүмкін: орта білімі бар, қабылдау комиссиясына құжаттар мен қабылдау туралы өтініш берген адам.

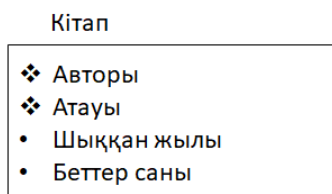
Нақты әлемдегі заттардың сипаттамалары бар (мысалы, Аты, тіркеу нөмірі, шығарылған күні, салмағы және т.б.). Нысанның барлық мүмкін даналарына ортақ әрбір жеке сипаттама атрибут деп аталады. Әр дананың төлсипаты белгілі бір мәнді алады. Сонымен, кітап нысанында автордың

атрибууттары, атауы, жарияланған жылы, беттер саны бар.

Әр объектінің идентификаторы - мәні объектінің әр данасын анықтайтын бір немесе одан да көп атрибуттардың жиынтығы болуы керек. Кітап үшін авторы мен оның атауы бірігіп идентификаторды құрайды. Сонымен қатар, жарияланған жылы мен беттер саны жеке де, бірлесіп де идентификатор бола алмайды, өйткені олар нысанды анықтамайды. Нысанда бірнеше идентификаторлар болуы мүмкін, олардың әрқайсысы бір немесе бірнеше атрибуттардан тұрады. Олардың бірі тиісті жағдай үшін артықшылық ретінде таңдалуы мүмкін.

Нысанды ұсыну әдістері:

5. Графикалық. Нысан өзінің атрибуттарымен бірге объектінің аты мен атрибут атаулары бар жақтау түрінде ұсынылуы мүмкін. Артықшылықты объект идентификаторын құрайтын атрибуттарды бөлуге болады (мысалы, атрибут атауының сол жағындағы * таңбамен):



6. Мәтіндік көріністе. Балама мәтін көрінісінде ол келесі түрге ие болуы мүмкін: Кітап (Автор. Атауы. Шыққан жылы. Беттер саны).

Ерекше идентификатор деп атап көрсетілген.

7. Кестеге. Бұл түсіндіруде нысанның әр данасы кестедегі жол, ал әр данаға сәйкес келетін атрибуттардың мәні жол ұяшықтары болып табылады.

(кесте.2.1)

Автор	Кітап		
	атауы	жыл	саны
Грин А.С	Толқындармен жүгіру	1988	279
Стивенсон Р.Л	Қазына аралы	1992	269
Скотт В.	Ричард Лионхарт	1993	349
Гончаров И.А	Жартас	1986	598

Атрибуттарды үш әр түрлі типтердегі үшеуінің біреуіне байланысты жіктеуге болады:

- сипаттамалық;
- көрсеткіштік;
- көмекші.

Сипаттамалық атрибуттар нысанның әр данасына іштей қатысты фактілерді білдіреді. Егер сипаттамалық атрибут мәні өзгерсе, бұл үлгінің (дананың) кейбір сипаттамалары өзгергенін, бірақ үлгінің өзі өзгеріссіз

қалатындығын білдіреді.

Көрсеткіштік атрибуттарды дана (экземпляр) идентификаторы ретінде пайдалануға болады (немесе идентификаторлардың бір бөлігі). Егер көрсеткіштік атрибуттарының мәні өзгертін болса, бұл тек жаңа атау сол данаға берілгенін білдіреді.

Көмекші атрибуттар объектінің бір данасын басқа объектінің данасымен байланыстыру үшін қолданылады.

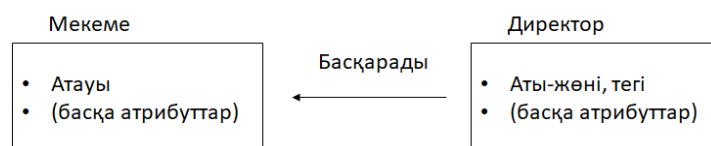
Мысал 2.2

Автомобиль (мемлекеттік нөмірі; маркасы; түсі; иесі).

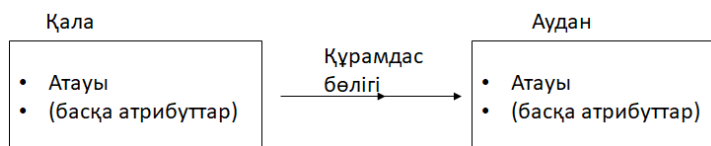
Автомобиль объектісі данасының Автоәуесқой объект данасымен байланысы үшін қызмет көрсететін "Түс" атрибуты сипаттамалық, "мемлекеттік нөмір" және "бренд" атрибуттары - көрсеткіштік, "иесі" атрибуты – көмекші болып табылады. Егер көмекші атрибуттың мәні өзгерсе, бұл қазір объектілердің басқа даналары бір-бірімен байланысты екенін айтады.

2.3 Объектілер арасындағы байланыстар

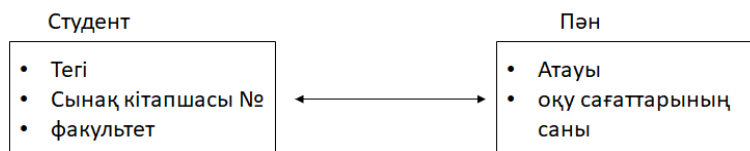
Нақты әлемде нысандар арасында әртүрлі қатынастар бар. Егер объектілер объект ретінде модельденсе, онда әртүрлі нысандар арасында жүйелі түрде пайда болатын қатынастар ақпараттық модельдерде байланыс ретінде көрінеді. Әрбір байланыс модельде белгілі бір атпен орнатылады. Графикалық нысандағы байланыс байланысқан объектілер арасындағы сызық ретінде ұсынылады және байланыс идентификаторымен белгіленеді. Байланыстың үш түрі бар :бірден - бірге, бірден - көпке және көптен - көпке (сурет. 2.2-2.4).



Сурет 2.2. «Бірден – бірге» байланысының мысалы



Сурет 2.3. «Бірден - көпке» байланысының мысалы



Сурет 2.4. «Көптен - көпке» байланысының мысалы

Көптіктен басқа, байланыстар шартсыз және шартты болып бөлінуі мүмкін. Шартсыз байланыста оған қатысу үшін объектінің әрбір данасы талап етіледі. Шартты байланысқа объектінің барлық даналары қатыспайды. Байланыс бір жағынан да, екі жағынан да шартты болуы мүмкін.

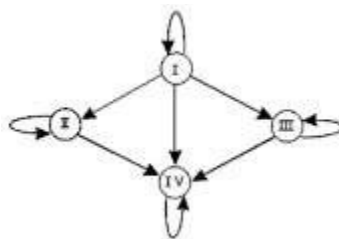
Ақпараттық модельдегі барлық байланыстар сипаттаманы қажет етеді, ол кем дегенде мыналарды қамтиды:

- байланыс идентификаторы;
- байланыс мәнін тұжырымдау;
- байланыс түрі (оның көптігі және шарттылығы);
- нысанның қосалқы атрибуттары арқылы байланысты сипаттау әдісі.

Ақпараттық модельдеу идеяларының одан әрі дамуы олар құрған байланыс және құрылымдар ұғымының дамуымен байланысты. Ең көп таралған ақпараттық модель графикалық құрылым деп аталады. Бұл ақпараттық модельдеудің көптеген мәселелерін шешудің негізі.

Графикалық құрылымның түрлері: кезек, циклдік құрылым, ағаштар, желілер, блок-схемалар, мәліметтер базасы (түйіндер кестелер, ал доғалар - байланыстар болып табылатын графиктер), гипермәтін (түйіндері мәтіндер, ал доғалар - гиперсілтемелер болып табылатын графиктер), карталар мен схемалар (кескінге салынған графиктер).

Мысал 2.5



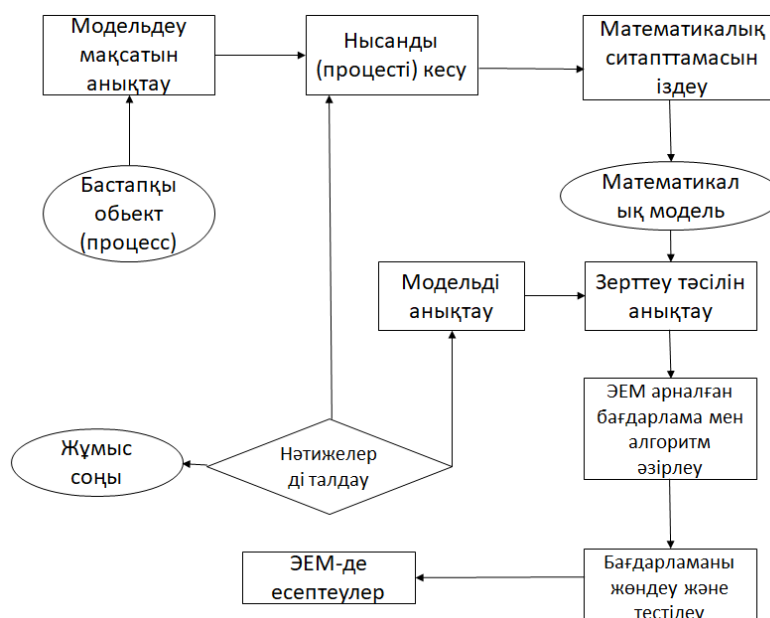
Сурет 2.5 Қан тобының үйлесімділік графы

Ақпараттық модельдеудің бір түрі-математикалық модельдеу.

3-тақырып. Математикалық модельдеу

3.1 Негізгі түсініктер

Математикалық модель - математикалық символизм көмегімен көрсетілген модельдеу объектісінің шамамен сипаттамасы. Математикалық модельдер көптеген ғасырлар бұрын математикамен бірге пайда болды. Компьютерлердің пайда болуы математикалық модельдеудің дамуына үлкен серпін берді. Компьютерлерді қолдану бұрын аналитикалық зерттеуге ұшырамаған көптеген математикалық модельдерді талдауға және қолдануға мүмкіндік берді. Компьютерде енгізілген математикалық модель компьютерлік математикалық модель деп аталады, ал компьютерлік модель арқылы мақсатты есептеулер жүргізу есептеу эксперименті деп аталады. Компьютерлік математикалық модельдеудің кезеңдері 3.1-суретте көрсетілген.



Сурет 3.1. Математикалық модельдеу кезеңдері

Бірінші кезең - модельдеу мақсаттарын анықтау, мәселені талдау және мәселені белгілеу. Модельдеу мақсаттары әртүрлі болуы мүмкін.

1. Модель белгілі бір объектінің қалай құрылғанын, оның құрылымы, негізгі қасиеттері, даму заңдылықтары мен сыртқы әлеммен өзара әрекеттесуін түсіну үшін қажет.

2. Модель объектіні (немесе процесті) басқаруды үйрену және берілген мақсаттар мен критерийлер үшін басқарудың ең жақсы тәсілдерін анықтау үшін қажет.

3. Модель объектіге әсер етудің берілген әдістері мен формаларын іске асырудың тікелей және жанама салдарын болжау үшін қажет.

Екінші кезең - модельді қатайту-модельдің кіріс және шығыс

параметрлерін анықтау; кіріс параметрлерін олардың өзгерістерінің шығысқа әсер етуінің маңыздылығы бойынша бөлу. Мұндай процесс дәреже немесе дәреже бойынша бөлу деп аталады. Нысанның әрекеті немесе процестің барысы байланысты болатын шамалардың тізімін, сондай-ақ модельдеу нәтижесінде алуға болатын шамалардың тізімін жасаймыз.

Стохастикалық модель үшін Шығыс параметрлері ықтималдық шамалары да, біркелкі анықталуы да мүмкін. Мысалы, көше қиылысында сіз бағдаршамның жасыл сигналын және жарты минутты және екі минутты күте аласыз (әр түрлі ықтималдылықпен), бірақ орташа күту уақыты-Бұл Нақты мән, және ол модельдеу нысаны бола алады.

Модельдеудің маңызды кезеңі кіріс параметрлерін олардың өзгерістерінің шығысқа әсер етуінің маңыздылығы бойынша бөлу болып табылады. Мұндай процесс рейтинг деп аталады (дәреже бойынша бөлу). Көбінесе бұл мүмкін емес және бізді қызықтыратын u_j мәндеріне әсер етуі мүмкін барлық факторларды ескерудің қажеті жоқ. Модельдеудің сәттілігі, мақсатқа жетудің жылдамдығы мен тиімділігі маңызды факторлардың қаншалықты шебер анықталғанына байланысты. Ең маңызды факторларды бөліп алып, модельді қамтитын пәндік саладағы маман ғана маңызды емес факторларды алып тастай алады.

Аз маңызды факторларды алып тастау модельдеу объектісін қатайтады және оның негізгі қасиеттері мен заңдылықтарын түсінуге көмектеседі. Шебер сараланған модель модельдеу мақсаттарына қатысты бастапқы объектіге немесе процеске сәйкес болуы керек. Әдетте модель тек онымен тәжірибе жасау, бастапқы модельдеу нәтижелерін талдау кезінде жеткілікті ме, жоқ па, соны анықтауға болады.

Үшінші кезең - математикалық модель құру. Бұл кезеңде модельдің абстрактілі тұжырымдамасынан нақты математикалық көрінісі бар тұжырымдамаға көшу бар. Математикалық модель - бұл теңдеулер, теңдеулер жүйесі, теңсіздіктер жүйесі, дифференциалдық теңдеулер немесе осындай теңдеулер жүйесі және т. б.

Төртінші кезең - математикалық модельді зерттеу әдісін таңдау. Көбінесе бұл жерде бағдарламалауға жақсы жауап беретін сандық әдістер қолданылады. Әдетте, дәлдікпен, тұрақтылықпен және т.б. ерекшеленетін бірнеше әдістер бірдей мәселені шешуге жарамды. Бесінші кезең-алгоритмді әзірлеу, компьютерге арналған бағдарламаны құру - бұл қиын процесс. Тапсырманың сипатына және программисттің бейімділігіне байланысты FORTRAN, PASCAL, DELPHI, C және т.б. бағдарламалау тілдері немесе математикалық есептерді шешуге арналған қолданбалы бағдарламалардың арнайы пакеттері (MATLAB, MathCAD және т. б.) пайдаланылады.

Алтыншы кезең - бағдарламаны жөндеу және тестілеу. Бағдарламаның жұмысы алдын-ала белгілі жауаппен тест тапсырмасында

тексеріледі. Бұл тестілеу процедурасының бастамасы ғана, оны формальды түрде толық сипаттау қиын. Әдетте тестілеу пайдаланушы өзінің кәсіби сипаттамалары бойынша бағдарламаны дұрыс деп тапқан кезде аяқталады.

Жетінші кезең - бұл есептеу эксперименті, процесте бұл модель нақты объектіге (процеске) сәйкес келетіндігін анықтайды. Модель нақты процеске жеткілікті, егер кейбір компьютерде алынған процестің сипаттамалары сәйкес келеді. берілген дәрежемен эксперименталды түрде алынған сипаттамалар дәлдігі. Егер модель нақты процеске сәйкес келмесе, алдыңғы кезеңдердің біріне ораламыз.

3.2 Математикалық модельдердің классификациясы

Математикалық модельдерді жіктеудің негізіне әртүрлі принциптерді қоюға болады. Модельдерді ғылым салалары бойынша жіктеуге болады (физика, биология, Әлеуметтану және т.б. математикалық модельдер). Қолданылатын математикалық аппаратқа сәйкес жіктеуге болады (қарапайым дифференциалдық теңдеулерді, жартылай дифференциалдық теңдеулерді, стохастикалық әдістерді, дискретті алгебралық түрлендірулерді және т.б. қолдануға негізделген модельдер). Сонымен, егер біз әртүрлі ғылымдардағы жалпы модельдеу есептерінен математикалық аппаратқа қарамастан, мұндай жіктеу ең табиғи болып табылады:

- дескрипті (сипаттамалық) модельдер;
- оңтайландыру модельдері;
- көп критерийлі модельдер;
- ойын модельдері.

Мұны мысалдармен түсіндірейік.

Дескрипті (сипаттамалық) модельдер. Мысалы, Күн жүйесіне кіретін кометаның қозғалысын модельдеу оның ұшу жолын, жерден өтетін қашықтықты және т.б. болжау үшін жасалады.

Оңтайландыру модельдері берілген мақсатқа жетуге тырысатын процестерді сипаттау үшін қолданылады. Бұл жағдайда модель әсерге қол жетімді бір немесе бірнеше параметрлерді қамтиды. Мысалы, астық қоймасындағы жылу режимін өзгерту арқылы сіз астықтың максималды қауіпсіздігіне қол жеткізу үшін осындай режимді таңдауға, яғни сақтау процесін оңтайландыруға болады.

Көпөлшемді модель. Көбінесе процесті бір уақытта бірнеше параметрлер бойынша оңтайландыру қажет, ал мақсаттар өте қарама-қайшылықты болуы мүмкін. Мысалы, азық-түлік бағасы мен адамның тамаққа деген қажеттілігін біле отырып, адамдардың үлкен топтарының (армияда, балалар жазғы лагерінде және т.б.) тамақтануын физиологиялық тұрғыдан дұрыс және сонымен бірге мүмкіндігінше арзан ұйымдастыру керек. Бұл мақсаттар мүлдем сәйкес келмейтіні анық, яғни модельдеу кезінде бірнеше критерийлер қолданылады, олардың арасында тепе-

теңдікті іздеу керек.

Ойын модельдері тек компьютерлік ойындарға ғана емес, сонымен қатар өте маңызды нәрселерге де қатысты болуы мүмкін. Мысалы, командир шайқас алдында, егер қарсылас армия туралы толық ақпарат болмаса, жоспар құруы керек: қарсыластың ықтимал реакциясын ескере отырып, осы немесе басқа бөліктерді ұрысқа қандай тәртіппен енгізу керек және т.б. Қазіргі математиканың арнайы бөлімі бар – толық емес ақпарат жағдайында шешім қабылдау әдістерін зерттейтін ойын теориясы.

3.3 Математикалық модельді құру мысалы

- 1 кезең. Модельдеу мақсатын анықтау, мәселені талдау, мәселені белгілеу (есеп қойылымы).
- 2 кезең. Модельдің кіріс және шығыс параметрлерін анықтау.
- 3 кезең. Математикалық модель құру.
- 4 кезең. Математикалық модельді зерттеу әдісін таңдау.
- 5 кезең. Алгоритмді әзірлеу.
- 6-7 кезеңдері. Бағдарламаны жөндеу, модельдік эксперимен жүргізу және нәтижелерді талдау.

4-тақырып. Имитациялық модельдеу және оның технологиясы. Этаптары және түрлері

4.1 Имитациялық модельдеудің негізгі түсініктері

Имитациялық модельдеу (ағылш. Simulation) - аналогты процестер арқылы компьютердің жадындағы нақты күрделі процестің құрылымы мен функцияларын мақсатты түрде зерттеу жүргізуге, оның кейбір параметрлерін оңтайландыруға мүмкіндік беретін математикалық құралдар жиынтығы, арнайы имитациялық компьютерлік бағдарламалар мен бағдарламалау технологиялары арқылы жүзеге асырылатын аналогты модельдеудің кең таралған түрі.

Кез-келген күрделі объектінің қызметін модельдеуге мүмкіндік беретін арнайы бағдарламалық кешен имитациялық модель деп аталады. Ол компьютерде параллельді өзара әрекеттесетін есептеу процестерін іске қосады, олар уақыт параметрлері бойынша (уақыт пен кеңістік масштабына дәл) зерттелетін процестердің аналогтары болып табылады. Жаңа компьютерлік жүйелер мен технологияларды құруда жетекші орын алатын елдерде ғылыми бағыт (Computer Science) имитациялық модельдеудің дәл осындай түсіндірмесін қолданады, ал осы бағыт бойынша магистрлік даярлау бағдарламаларында тиісті оқу пәні бар.

Кез-келген модельдеудің әдіснамалық негізінде кез-келген

символизм (математика) немесе аналогтар көмегімен шындықты модельдеу элементтері бар екендігін айта кету керек. Сондықтан, көптеген жоғары оқу орындарында экономикалық-математикалық модельдер мен әдістерді қолдана отырып, компьютерде орындалатын көп нұсқалы есептеулердің мақсатты сериялары модельдеу деп атала бастады. Алайда, компьютерлік технологиялар тұрғысынан мұндай модельдеу есептеу бағдарламалары немесе Excel кестелік процессоры арқылы орындалатын қарапайым есептеулер болып табылады. Математикалық есептеулерді (соның ішінде кестелік) компьютерсіз де жасауға болады: калькуляторды, логарифмдік сызғышты, арифметикалық амалдар ережелерін және көмекші кестелерді қолдана отырып. Бірақ модельдеу - бұл таза компьютерлік жұмыс, оны импровизацияланған құралдармен орындау мүмкін емес. Сондықтан модельдеудің бұл түрі үшін компьютерлік модельдеу синонимі жиі қолданылады.

Имитациялық модельді жасау керек. Ол үшін арнайы бағдарламалық жасақтама – модельдеу жүйесі қажет. Мұндай жүйенің ерекшелігі жұмыс технологиясымен, тілдік құралдар жиынтығымен, сервистік бағдарламалар мен модельдеу әдістерімен анықталады.

Имитациялық модель уақыт (уақыт бойынша динамика) және кеңістіктегі (кеңістіктік динамика) модельденген объектінің көптеген параметрлерін, логикасы мен мінез-құлық заңдылықтарын көрсетуі керек. Экономика объектілерін модельдеу объектінің қаржылық динамикасы ұғымымен байланысты. Маманның (информатика-экономист, математика-бағдарламашы немесе экономист-математика) көзқарасы бойынша бақыланатын процесті немесе басқарылатын объектіні модельдеу - бұл компьютермен орындалатын екі әрекетті қамтамасыз ететін жоғары деңгейдегі ақпараттық технология:

1) Имитациялық модельді жасау немесе түрлендіру бойынша жұмыстар;

2) Имитациялық модельді пайдалану және нәтижелерді түсіндіру.

Экономикалық процестерді модельдеу (компьютерлік) модельдеу әдетте екі жағдайда қолданылады:

- басқарылатын экономикалық объектінің имитациялық моделі ақпараттық (компьютерлік) технологиялар негізінде құрылған адаптивті басқару жүйесінің контурында құрал ретінде пайдаланылатын күрделі бизнес-процесті басқару үшін;

- күрделі экономикалық объектілердің дискретті-үздіксіз модельдерімен табиғи модельдеуі қажет емес немесе мүмкін емес тәуекелдерге байланысты шұғыл жағдайларда олардың динамикасын алу және бақылау үшін эксперименттер жүргізу кезінде.

Экономикалық объектілерді басқару кезінде модельдеу арқылы шешілетін келесі типтік міндеттерді бөліп көрсетуге болады:

- уақыт және шығын параметрлерін анықтау үшін логистикалық

процестерді модельдеу;

- ықтимал тәуекелдер мен ақша сомаларын бөлу тактикасын ескере отырып, инвестициялық жобаны оның өмірлік циклінің әртүрлі кезеңдерінде іске асыру процесін басқару;

- кредиттік ұйымдар желісінің жұмысындағы клирингтік процестерді талдау (оның ішінде ресейлік банк жүйесі жағдайында өзара есеп айырысу процестеріне қолдану);

- нақты уақыт кезеңіне кәсіпорын қызметінің қаржылық нәтижелерін болжау (шоттардағы сальдо динамикасын талдаумен);

- дәрменсіз кәсіпорынның бизнес-реинжинирингі (банкрот кәсіпорынның құрылымы мен ресурстарын өзгерту, содан кейін Имитациялық модель көмегімен негізгі қаржылық нәтижелерге болжам жасауға және өндірістік қызметті қайта құрудың, инвестициялаудың немесе кредиттеудің қандай да бір нұсқасының орындылығы туралы ұсынымдар беруге болады);

- компьютерлік аймақтық банктік ақпараттық жүйенің бейімделу қасиеттері мен өміршендігін талдау (мысалы, Жапонияда 1995 жылғы апатты жер сілкінісінен кейін ішінара істен шыққан электронды есеп айырысу және төлем жүйесі жоғары өміршендігін көрсетті: операциялар бірнеше күннен кейін қайта басталды);

- орталықтандырылған экономикалық ақпараттық жүйеде сенімділік параметрлері мен кідірістерді ұжымдық қолжетімділікпен бағалау (дерекқорды физикалық ұйымдастырудың жетілдірілмеуін және жабдықтың істен шығуын ескере отырып, авиабилеттерді сату жүйесінің мысалында);

- біртекті емес құрылымды, байланыс арналарының өткізу қабілетін және өңірлік орталықтардағы таратылған дерекқорды физикалық ұйымдастырудың жетілмегендігін ескере отырып, таратылған көп деңгейлі ведомстволық ақпараттық басқару жүйесінің пайдалану параметрлерін талдау;

- табиғи апат немесе ірі өнеркәсіптік апат салдарынан зардап шеккен аймақтағы курьерлік тікұшақ тобының іс-әрекеттерін модельдеу;

- аймақтағы тауар және ақша ағындарының ерекшелігін ескере отырып, жүктерді коммерциялық тасымалдаумен айналысатын автокөлік кәсіпорнының жұмысын талдау;

- банктік ақпараттық жүйеде ақпаратты өңдеудің сенімділігі мен кідірістерін есептеу.

Жоғарыда келтірілген тізім толық емес және әдебиетте сипатталған немесе авторлар іс жүзінде қолданған Имитациялық модельдерді қолдану мысалдарын қамтиды.

Имитациялық модельдеу аппаратының нақты қолданылу саласы көрінетін шектеулерге ие емес. Мысалы, APOLLO кемесінде төтенше жағдай туындаған кезде американдық астронавттарды құтқару Ресейдің

ғарыш кешенінің модельдерінде құтқарудың әртүрлі нұсқаларын ойнаудың арқасында мүмкін болды.

Аталған мәселелерді шешу үшін модельдер құруды қамтамасыз ететін ИМ жүйесі келесі қасиеттерге ие болуы керек:

- басқару теориясына негізделген арнайы экономикалық-математикалық модельдермен және әдістермен бірге Имитациялық бағдарламаларды қолдану мүмкіндігі;
- күрделі экономикалық процестің құрылымдық талдауын жүргізудің аспаптық әдістері;
- жалпы модельдік уақыт шеңберінде, бірыңғай модель шеңберінде материалдық, ақша және ақпараттық процестер мен ағындарды модельдеу қабілетімен;
- шығыс деректерін (негізгі қаржылық көрсеткіштерді, уақытша және кеңістіктік сипаттамаларды, тәуекелдер параметрлерін және т.б.) алу және экстремалды эксперимент жүргізу кезінде тұрақты нақтылау режимін енгізу мүмкіндігі.

Тарихи анықтама. Экономикалық үдерістерді имитациялық моделдеу-экономикалық-математикалық үлгілеудің бір түрі. Алайда, модельдеудің бұл түрі негізінен компьютерлік технологияларға негізделген. 1970-1980 жылдары идеологиялық тұрғыдан дамыған көптеген модельдеу жүйелері компьютерлік технологиялар мен операциялық жүйелермен бірге эволюцияға ұшырады (қазіргі уақытта жаңа компьютерлік платформаларда тиімді қолданылады). Сонымен қатар, 1990 жылдардың соңында. 1970-1980 жылдардағы компьютерлер мен операциялық жүйелерді пайдалану кезінде тұжырымдамалары бұрын пайда болмайтын түбегейлі жаңа модельдеу жүйелері пайда болды.

4.2 Модельдеу технологиясы және этаптары

Модельдеу математикалық құралдар жиынтығы, компьютердің көмегімен күрделі процестің құрылымы мен функцияларын модельдеу режимінде мақсатты модельдеуге, сондай-ақ оның кейбір параметрлерін онтайландыруға мүмкіндік беретін арнайы компьютерлік бағдарламалар мен әдістер арқылы жүзеге асырылады. Бағдарламалық құралдар мен модельдеу әдістерінің жиынтығы модельдеу жүйесінің ерекшелігін – арнайы бағдарламалық жасақтаманы анықтайды.

Компьютерлерді қолдана отырып математикалық модельдеудің басқа түрлері мен әдістерінен айырмашылығы, модельдеудің өзіндік ерекшелігі бар: компьютерде уақыт параметрлері бойынша – уақыт пен кеңістік масштабына дәл сәйкес келетін өзара әрекеттесетін есептеу процестерін іске қосу – зерттелген процестердің аналогтары.

Арнайы ақпараттық технология ретінде модельдеу келесі негізгі этаптардан (кезеңдерден) тұрады.

1. Процестерді құрылымдық талдау. Күрделі нақты процестің құрылымын формализациялау оны белгілі бір функцияларды орындайтын және жұмыс сараптамалық тобы жасаған аңыз бойынша өзара функционалды байланысы бар ішкі процестерге бөлу арқылы жүзеге асырылады. Анықталған ішкі процестер өз кезегінде басқа функционалды ішкі процестерге бөлінуі мүмкін. Жалпы модельденген процестің құрылымы иерархиялық көп қабатты құрылымы бар график түрінде ұсынылуы мүмкін. Нәтижесінде Имитациялық модельдің формальды бейнесі графикалық түрде пайда болады.

Экономикалық процестер физикалық негізі жоқ және іс жүзінде жүретін ішкі процестерді қамтиды, өйткені олар ақпаратпен, ақшамен, логикамен, заңдармен және оларды өңдеумен жұмыс істейді, сондықтан құрылымдық талдау экономикалық процестерді модельдеудің тиімді кезеңі болып табылады. Бұл кезеңде экзогендік айнымалылар сипатталады, яғни модельден тыс айнымалылар, яғни алдын-ала белгілі. Параметрлер әлі де сипатталған - бұл модель теңдеулерінің коэффициенттері. Көбінесе олар бөлінбейді. Эндогендік айнымалылар - бұл модель бойынша есептеулер кезінде анықталатын және оған сырттан орнатылмайтын айнымалылар.

2. Модельдің формальды сипаттамасы. Модельдің графикалық бейнесі, әр ішкі процесс орындайтын функциялар, барлық ішкі процестердің өзара әрекеттесу шарттары және модельденген процестің мінез-құлық ерекшеліктері (уақытша, кеңістіктік, қаржылық динамика әдістердің бірімен арнайы тілде сипатталуы керек):

- алгоритмдік тілде қолмен сипаттау, яғни бағдарламаны бағдарламалау тілінде жазу;

- компьютерлік графикалық конструктордың көмегімен автоматтандырылған сипаттама.

Модель құру:

- әдетте бұл байланыстарды тарату және өңдеу (үлгіні құрастыру);
- түсіндіру және құрастыру режимдері;
- параметрлерді тексеру (калибрлеу), сынақ мысалдарымен жұмыс.

3. Модельдік эксперимент жүргізу. Нақты процестің белгілі бір параметрлерін оңтайландыру жүзеге асырылады. Бұған дейін экспериментті жоспарлау деп аталатын процесс болуы керек.

4.3 Имитациялық модельдеу түрлері

1. Жүйелік динамика - зерттелетін жүйе үшін уақыт өте келе себептік байланыстардың графикалық диаграммалары және кейбір параметрлердің басқаларына ғаламдық әсері салынатын модельдеу түрі, содан кейін осы диаграммалар негізінде жасалған модель компьютерде имитацияланады. Модельдеудің бұл түрі барлық басқа түрлерге қарағанда объектілер мен

құбылыстар арасындағы себептік байланыстарды анықтаудың мәнін түсінуге көмектеседі. Жүйелік динамиканың көмегімен бизнес-процестердің модельдері, қаланың дамуы, өндіріс модельдері, популяция динамикасы, экология және індеттің дамуы құрылады. Бұл әдісті Форрестер 1950 жылдары құрған.

2. Дискретті-оқиғалық модельдеу - бұл оқиғалардың үздіксіз табиғатынан абстракциялауды және модельденген жүйенің тек негізгі оқиғаларын қарастыруды ұсынатын модельдеу тәсілі, мысалы: "күту", "тапсырысты өңдеу", "жүкпен жүру", "түсіру" және т.б. дискретті оқиғаларды модельдеу ең дамыған және қолданудың үлкен саласына иелогистика мен қызмет көрсету жүйелерінен бастап Көлік және өндірістік жүйелерге дейін. Модельдеудің бұл түрі Өндірістік процестерді модельдеу үшін ең қолайлы. Джеффри Гордон 1960 жылдары құрған.

3. Агенттік модельдеу - бұл орталықтандырылмаған жүйелерді зерттеу үшін қолданылатын, модельдеу модельдеуіндегі салыстырмалы түрде жаңа (1990 - 2000 жж.), оның жұмыс істеу динамикасы жаһандық ережелер мен заңдармен (модельдеудің басқа түрлеріндегідей) емес, керісінше, Ғаламдық ережелер мен заңдар топ мүшелерінің жеке белсенділігінің нәтижесі болып табылады. Агент модельдерінің мақсаты-осы ғаламдық ережелер, жүйенің жалпы мінез-құлқы, оның жеке белсенді объектілерінің жеке, жеке мінез-құлқы және осы объектілердің жүйеде өзара әрекеттесуі туралы болжамдарға негізделген түсінік алу. Агент-белсенділігі, автономды мінез-құлқы бар белгілі бір субъект белгілі бір ережелер жиынтығына сәйкес шешім қабылдай алады, қоршаған ортамен өзара әрекеттеседі, сонымен қатар өзін-өзі өзгерте алады.

5-тақырып. Кездейсоқ процесстерді модельдеу. Монте-Карло әдісі. Монте- Карло әдісі көмегімен интегралдарды есептеу.

5.1 Негізгі түсініктер

Ықтималды модельдерде модельденген жүйенің күйлерінің өзгеруі кездейсоқ шамалармен анықталады.

Егер оқиға сенімді түрде болжанбаса, кездейсоқ деп аталады. Кездейсоқтық біздің әлемге еніп және көбінесе біздің өмірімізде теріс рөл атқарады. Алайда, кездейсоқтық пайдалы болуы мүмкін жағдайлар бар.

Есептеу математикасының есептерін шешудің кең таралған әдістерінің бірі - Монте-Карло әдісі деп аталатын кездейсоқ әдіс. Әдістің мәні мынада: І санын есептеумен байланысты кез-келген математикалық есепті шешу үшін ξ кездейсоқ шаманың белгілі бір шамасы құрылады, мысалы, осы кездейсоқ шаманың математикалық күтуі $e(\omega)$ қажетті шешімнің мәні болып табылады. Кездейсоқ ξ шамасы бар есептеу

эксперименттерін жүргізе отырып, біз эксперимент нәтижелерінің орташа мәні ретінде жуық шешімді таба аламыз.

5.2 Монте-Карло әдісі

Статистикалық тестілеу әдісін (Монте-Карло әдісі) жасаушылар американдық математиктер Д.Нейман мен С. Улам болып саналады. 1944 жылы атом бомбасын жасау жұмыстарына байланысты Нейман қолданбалы есептерді компьютерлермен шешу үшін ықтималдық теориясының аппаратын кеңінен қолдануды ұсынды. Бұл әдіс қарапайым кездейсоқ сандар генераторы болғандықтан Монако округіндегі қаланың атымен аталған.

Бастапқыда Монте-Карло әдісі негізінен нейтрондық физика есептерін шешу үшін қолданылды, онда дәстүрлі сандық әдістер аз қолданылды. Әрі қарай оның әсері статистикалық физика есептерінің кең класына таралды, олардың мазмұны өте әртүрлі. Монте-Карло әдісі көбірек қолданылатын ғылымның бөлімдеріне қызмет көрсету теориясының есептері, ойын теориясының және математикалық экономиканың есептері, кедергі болған кезде хабарлама беру теориясының есептері және тағы басқалар кіруі керек.

Монте-Карло әдісін (немесе статистикалық сынақ әдісін) олардың таралу сипаттамаларын есептеу үшін кездейсоқ шамаларды модельдеу әдісі ретінде анықтауға болады. Төменгі жол - бұл сынақтардың нәтижесі берілген заңға сәйкес бөлінген кездейсоқ шамаға байланысты. Сондықтан әрбір жеке сынақтың нәтижесі кездейсоқ болып табылады. Әдетте, бір кездейсоқ сынақты жүзеге асыру үшін бағдарлама жасалады. Бірқатар сынақтардан кейін олар үлгіні алады. Алынған статистикалық деректер зерттеушіні қызықтыратын шамаларды (жүйе сипаттамаларын) сандық бағалау түрінде өңделеді және ұсынылады. Сынақ N рет қайталанады, әр тәжірибе басқаларға тәуелді емес және барлық тәжірибелердің нәтижелері орташа болады. Бұл сынақтардың саны жеткілікті үлкен болуы керек дегенді білдіреді, сондықтан әдіс компьютердің мүмкіндіктеріне негізделген.

Монте-Карло әдісінің теориялық негізі ықтималдық теориясының шекті теоремалары болып табылады. Олар өте көп сынақтар кезінде статистикалық бағалаудың жоғары сапасына кепілдік береді. Статистикалық сынақ әдісі стохастикалық және детерминистік жүйелерді зерттеу үшін қолданылады. Монте-Карло әдісін компьютерді пайдаланбай іс жүзінде жүзеге асыру мүмкін емес.

5.3 Монте-Карло әдісі көмегімен интегралдарды есептеу

Көптеген мәселелерде бастапқы деректер кездейсоқ болып

табылады, сондықтан оларды шешу үшін статистикалық-ықтималдық тәсіл қолданылуы керек. Осындай тәсілдердің негізінде есептелген немесе өлшенетін шамалардың кездейсоқ сипатын ескеретін бірқатар сандық әдістер салынды. Оларға Монте-Карло әдісі деп аталатын статистикалық сынақ әдісі жатады, ол есептеу математикасының кейбір мәселелерін шешуге, соның ішінде интегралдарды есептеуге қолданылады.

Монте-Карло әдісі - кейбір кездейсоқ шамасы қарастырылады, оның математикалық күтуі қажетті x мәніне тең:

$$\xi = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} \approx x.$$

Нәтижесінде $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ кездейсоқ сандардың n тізбегі алынатын (жасалатын) және осы мәндердің жиынтығы бойынша жуық шамамен келесі ізделінді шама анықталатын тәуелсіз сынақтардың n сериясы жүргізіледі:

$$M_\xi = M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \frac{1}{n} M \sum_{i=1}^n \xi_i = \frac{nx}{n} = x.$$

Бір өлшемді интегралдарды интегралдау.

Монте-Карло әдісімен бір өлшемді анықталған интегралдарды интегралдау төменде көрсетілген алгоритм бойынша жүзеге асырылады:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i),$$

мұндағы x_i - біркелкі бөлінген кездейсоқ шама; $f(x)$ - интегралдық функция; n -кездейсоқ аргументтердің саны x_i , b және a - интеграцияның жоғарғы және төменгі шектері. MathCad-да 0-X диапозонында біркелкі бөлінген кездейсоқ шаманы қайтаратын кіріктірілген **rnd(x)** функциясы бар. Монте-Карло әдісімен берілген есептерді шешу үшін осы функцияны қолдана отырып бағдарлама жасау керек.

6-тақырып. Кездейсоқ сандар генераторы

6.1 Кездейсоқ сандар генераторы

Стохастикалық жүйелерді имитациялық модельдеу кезінде уақыт бойынша жүйенің қызмет ету үрдісін сипаттайтын алгоритмдерді іске асыру орындалады. Сонымен бірге қарапайым құбылыстың логикалық және уақыттық бірізділігін ескере отырып, жүйеде жүретін қарапайым құбылыс қайта жаңғыртылады. Әдетте кездейсоқ сипатқа ие осындай құбылыстарды модельдеу үшін кездейсоқ сандар қолданылады. Сәйкесінше, талап етілген көрсеткіштері мен сипаттамалары бар кездейсоқ мәнді түрлендіре алу қажет. Жалпылама қолданылатын жүйелік

бағдарламалық құралдардың көпшілігі кездейсоқ мәнді түрлендіру үшін өз құрамында арнайы стандартты бағдарламашалары болады. Бірақ көп жағдайда пайдаланушыға қажетті стандартты бағдарламашалар жоқ немесе қойылған талапқа жауап бермейтін болып шығады, сондықтан кездейсоқ мән генераторларын өздігінен әзірлеп және тексеріп білу керек. Базалық генераторларға кез-келген берілген таратуы бар кездейсоқ мән бірізділігін алатын интервалдағы $[0; 1)$ біркелкі таралған кездейсоқ мәнің генераторы болып табылады.

Егер t_0 уақытының кез-келген сәті үшін болашақта процестің ықтималды сипаттамалары тек t_0 қазіргі кездегі күйіне байланысты болса және жүйенің бұл күйге қашан және қалай енгеніне тәуелсіз болса, жүйеде болатын кездейсоқ процесс Марков процесі деп аталады.

Әйтпесе, Марков процесінде "болашақ тек өткенге байланысты" деп тұжырымдайды.

Кездейсоқ сандарды түрлендіру үшін келесі әдістердің бірі қолданылады.

1. Аппараттық. Аппаратты генератордың негізінде қандай да бір физикалық эффект (мысалы, электронды құрылғылардағы шуыл немесе басқа құбылыстар) жатыр. Осындай генератордың артықшылығы оның көмегімен алынатын кездейсоқ сандар мүлде кездейсоқ болып табылады. Аппараттық генератор санының қоры да шектелген. Аппараттық генератордың кемшілігі ретінде тура модельдеу кезінде кездейсоқ санның алынатын бірізділігінің сапасына кепіл бермейтіндігін атап кету керек. Сонымен қатар, аппараттық генератор көмегімен модельденетін бағдарламаларды дұрыстау және жүйені ұйымдастырудың ұқсас нұсқаларын салыстыру кезінде пайдалану дұрыс кездейсоқ санның бірдей тізбегін алуға болмайды. Сондықтан модельдеу кезінде аппараттық генераторлар іс жүзінде қолданылмайды.

2. Кестелік. Кестелік генераторды қолдану кезінде алдын ала алынған және тексерілген кездейсоқ сандар ЭЕМ жадысында кесте түрінде рәсімделген. Бұл әдіс аппараттық генераторда айтылған кемшіліктен бос. Бірақ кестелік генераторды пайдалану кезінде кездейсоқ сан қоры кесте мөлшерімен шектелген. Сонымен қатар, ЭЕМ қоры тиімсіз пайдаланылады. Сондықтан бұл әдісті модельдеуде салыстырмалы түрде сирек қолданады.

3. Арифметикалық (сандық). Арифметикалық генераторды қолдану кезінде әр жаңа сан берілген математикалық формулаға сай бір немесе бірнеше туынды сандармен анықталады. Бұл әдіс бұған дейін қарастырылған генераторлардың кемшілігінен бос. Сондықтан модельдеу кезінде дәл осы арифметикалық генератор жиі қолданылады. Айта кететін жайт, арифметикалық генераторлар көмегімен ЭЕМ кездейсоқ сан тізбегін алу кезінде алгоритмдер қолданылады. сондықтан осындай тізбектен

негізінен детерминделген болып табылады, бірақ сырттан бақылаушығы кездейсоқ сияқты көрінетін, жалған кездейсоқ деп аталады. Тағы назар аудартатыны, кез-келген ЭЕМ текп-разрядтық сандарды пайдаланады. Осыған байланысты ЭЕМ интервалдан $[0; 1)$ біркелкі кездейсоқ сандардың үздіксіз жиынтығының орнына сол интервалдан 2^p кездейсоқ саннан артық емес дискретті тізбек ғана алынуы мүмкін. Сондықтан осындай дискретті тізбектің таралуы квазибіркелкі деп аталады.

Кездейсоқ сандық мінсіз генераторға келесі талаптар қойылды:

- тізбек квазибіркелкі таралған сандардан тұруы керек;
- сандар статистикалық тәуелсіз болуы қажет;
- кездейсоқ санның тізбегі қайта жаңғыртылатындай болуы тиіс;
- тізбегі периодсыз болуы керек;
- тізбегі есептеу қорларының минимальді шығынымен алынуы қажет;
- генераторлар машина жадысының минимальді көлемін алуы тиіс.

Одан әрі кездейсоқ санның арифметикалық генераторларының негізгі типтерін қарастырамыз. Кездейсоқ сан генераторлары кейде оқулық мәтінінде датчиктер деп аталатындығын ескеру қажет.

Ақиқат кездейсоқ сандарды біз тек жалған кездейсоқ сандардың генераторларына кіріс беретін бастапқы сандарды табу үшін ғана қолданамыз. Бастапқы сан табылғаннан кейін генератор өмірге кездейсоқ (толығырақ жалған кездейсоқ) сандардың кез-келген санын шығара алады. Керек болған жағдайда біз ақиқат кездейсоқ сандарды кездейсоқ сандардың генераторының бастапқы санына қоса аламыз. Бұл, егер қаскүнем қандай да бір түрмен бастапқы санды біліп алған болса да, ақырғының шығыс мәліметтері ешқашан толық болжамды болмайтындығына кепілдік бере алады.

6.2 Кездейсоқ санның арифметикалық генераторлары

Кездейсоқ (жалған кездейсоқ) сандарды шығарудың көптеген алгоритмі, рәсімі және әдісі белгілі. Жалпы алғанда, бағдарламалық генераторлар кейбір рекуррентті формулалар бойынша сандардың реттілігін жасайды.

$$x_{n+1} := Q(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-p+1})$$

Мұнда x_{n+1} санын алу үшін $x_{n+1}, \dots, x_1$ сандарына жасау керек операциялар жиынтығы. Сонымен қатар, $x_{n+1}, \dots, x_1$ реттілігінің сапасы алғашқы (бастапқы) $x_{n+1}, \dots, x_1$ сандарға қатыстылығы айтарлықтай болады. Рәсімді бірнеше рет қолдану нәтижесінде анықталған сипаттағы сандардың реттілігі алынады, алайда білгілі бір шекараларда ол біркелкі орналастыру қасиеті мен кездейсоқтық қасиетімен қанағаттандырылады.

Қазіргі таңда кеңінен қолданылатын сандарды жалпы түрде біркелкі бөлетін бағдарламалық генераторларды келесі формула арқылы көрсетсе болады:

$$Y_{n+1} = \left[\sum_{i=1}^m a_i Y_{n-i} + 1 \right] \text{mod } m$$

Мұнда $a_1, a_2, \dots, a_m$ және m , сонымен қатар $y_0, y_1, \dots$ сандары бүтін сандар болып табылады. Жалған кездейсоқ сандардың $[0; 1]$ интервалында біркелкі орналастыру келесі өрнек арқылы жүзеге асырылады:

$$x_{n+1} = \frac{Y_{n+1}}{m}$$

Лемер алгоритмі (мультипликативті датчик). Лемер алгоритмін қолдануға негізделген кездейсоқ сан датчигі сызықты конгруэнтті әдістің жеке жағдайы болып табылады. Ол мына формуламен ұсынылады:

$$a = a_1 = \dots = a_m = 0$$

және $a = a_0 > 0$, деп болжай отырып келесі формуланы аламыз:

$$Y_{n+1} = aY_n \text{mod } m$$

Лемер алгоритмінде сәйкес тәсілмен таңдалған екі бүтін сан беріледі: көбейткіш a және модуль m , сонымен қатар бастапқы мән Y_0 . Кездейсоқ санның тізбегі келесідей есептелінеді.

1. y саны алдыңғы қадамнан белгілі. a_{y+m} туындысы есептелінеді
2. a_y -ды m -ге бөлгеннен $y+1$ қалдығы қалады.
3. $y + 1$ интервалынан $[0; 1)$ бүтін сан болып табылатындықтан, интервалдағы $[0; 1)$ санды алу үшін оны тағы да m б-лу керек:

$$x_{y+1} = \frac{Y_{y+1}}{m}$$

Қандай да бір шамаға байланысты бағдарлама нәтижесі кездейсоқ болуы керек жағдайлар туындайды. Осындай мүмкіндіктерді жасау үшін көптеген бағдарламалау тілдерінде кездейсоқ сан беретін стандартты функциялар бар. Негізінен, сандар кездейсоқ емес, жалған кездейсоқ болады. Себебі жасанды түрде кездейсоқ сан жасау мүмкін емес. Көбіне қандай да бір коэффициент алынып және оның арқасында келесі

"кездейсоқ" сан есептеледі.

6.3 Mathcad-тағы кездейсоқ сан генераторлары

Mathcad-да әр тарату Заңы үшін Монте – Карло әдісімен модельдеуге мүмкіндік беретін кездейсоқ сандар генераторы функциясы бар. Олардың ішіндегі ең қарапайымы, rnd(N) функциясы 0-ден n-ге дейінгі аралықта орналасқан бір кездейсоқ санды қайтарады.кездейсоқ сандардың барлық басқа генератор функциялары таңдалған заңға сәйкес бөлінген сандар векторын жасайды. Мысалы, runif(M, a, b) a-дан b-ге дейінгі аралықта біркелкі бөлінген M сандарының векторын жасайды.

Мысалы, 0 және x арасында біркелкі бөлінген бір кездейсоқ санды жасаңыз. суретте кездейсоқ сандар генераторының жұмыс істеу принципі көрсетілген.

$$\text{rnd}(2) = 2.537 \times 10^{-3} \quad i := 1..4 \quad V_i := \text{rnd}(10)$$

$$\underline{V} := \text{morm}(5, 10, 2) \quad \underline{V} := \text{rexp}(5, 10)$$

$$\underline{V} := \text{sort}(V) \quad \underline{V} := \text{reverse}(V)$$

$$V = \begin{pmatrix} 0.077 \\ 0.062 \\ 0.025 \\ 0.015 \\ 4.51 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$\text{mean}(V) = 0.037$$

$$\text{var}(V) = 7.843 \times 10^{-4}$$

$$\text{stdev}(V) = 0.028$$

+

6.1 сурет. Кездейсоқ сандар генераторының жұмысы

Кездейсоқ сандар массивін қалыптастыру

$N := 4 \quad a := 1 \quad b := 4 \quad k := 1..N$

rnd-ден басқа барлық

функциялар үшін :

$\varepsilon_{\langle k \rangle} := \text{runif}(3, a, b)$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 3.99 & 3.52 & 1.026 & 3.513 \\ 0 & 2.834 & 2.128 & 1.828 & 2.455 \\ 0 & 1.799 & 3.032 & 2.764 & 3.231 \end{pmatrix}$$

Енді генераторды ауыстырып көрейік.

$N := 3 \quad m := 1 \quad i := 1..N \quad j := 1..m$

$\Delta_{i,j} := \text{rnd}(5)$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.845 \\ 0 & 2.459 \\ 0 & 3.499 \end{pmatrix}$$

6.2 сурет. Кездейсоқ сандар генераторының жұмысы (жалғасы)

Гистограммаларды құру

Гистограмма-кездейсоқ мәліметтер бойынша таралу тығыздығын жақындататын график. Гистограмма құру кезінде кездейсоқ шаманың мәндер аймағы сегменттердің берілген санына бөлінеді, содан кейін әр

сегментке хиттер саны есептеледі.

MathCAD-да гистограмма құрудың екі функциясы бар:

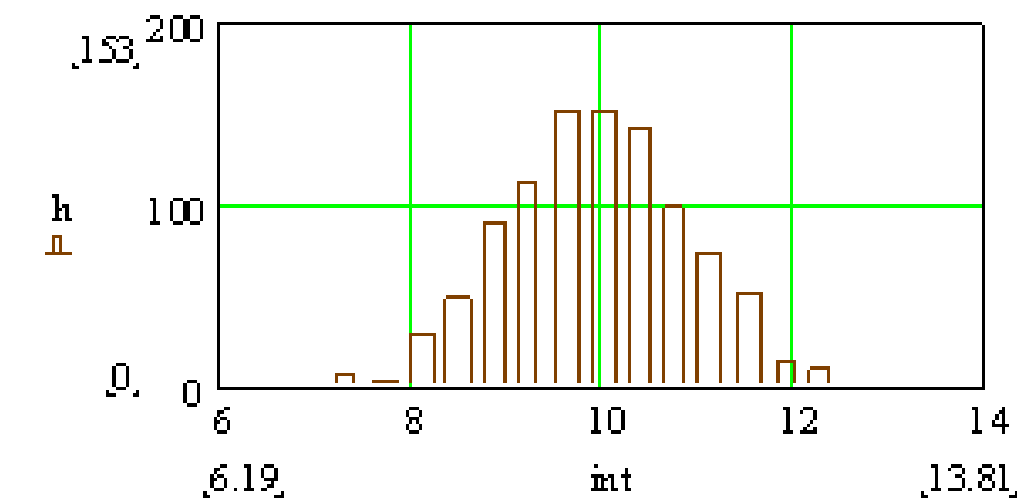
1) `histogram(n, data)`. Мұнда `n`-бастапқы деректердің барлық ауқымы бөлінетін интервалдар саны. Бұл функция 2 бағанды қайтарады. Біріншісінде `N` интервалдарының әрқайсысының орташа нүктелері, екіншісінде – `N` интервалдарының әрқайсысына `data` векторының кездейсоқ сандарының түсу жиілігі. Гистограмма құрудың мысалы 6.3-суретте келтірілген. Осы суреттегі 1000 санның `V` бастапқы деректерінің массивтері таңдалған үлестіру Заңына сәйкес кездейсоқ сандар генераторларымен жасалады. Интервалдар саны таңдалды 21.

2) `hist(int, data)`. Мұнда `int` екі мағынаға ие: не бұл Интервалдардың ортасының векторы (әр түрлі еңнің аралықтарын орнатуға болады) немесе интервалдар саны. деректер-кездейсоқ сандардың векторы.

қалыпты үлестіру	<code>V := norm(1000,10,1)</code>
Стюдент үлестіруі	<code>V1 := rt(1000,100)</code>
біркелкі тарату	<code>V2 := runif(1000,-2,2)</code>
логарифмдік қалыпты	<code>V3 := rlnorm(1000,0,1)</code>
логистикалық үлестіру	<code>V4 := rlogis(1000,0,1)</code>

Гистограмма құру

<code>nn := 21</code>	<code>hh := histogram(nn,V)</code>
<code>int := hh^{<1>}</code>	интервалдардың орташа нүктелерінің векторы
<code>h := hh^{<1>}</code>	сандардың интервалға түсу жиілігі



6.3 сурет. histogram функциясын қолдану

7-тақырып. Дискретті Марков процесстері

7.1 Дискретті Марков процесстері

Нәтижесіз процестер көптеген техникалық жүйелер жұмыс істеген кезде орын табады. Алғаш рет мұндай процестің бір түрін орыс математигі А.А. Марков ғылыми қолданысқа енгізді және зерттеді, сондықтан олар пайда болмайтын процестер мен олар жүретін жүйелер Марков деп аталады, ал мұндай процестің бір түрі Марков тізбегі деп аталады.

А.А. Марков үлкен ықтималдық теориясының шекті теоремасының дәлелдерінің бірін және тағы басқаларын беретін ең кіші квадраттар әдісінің (MNC) ықтималды негіздемесі ретінде де белгілі.

Марков процестерінің теориясы көрнекті отандық математик Андрей Николаевич Колмогоровтың еңбектерінде одан әрі дамыды.

Марков процестері екі сыныпқа бөлінеді:

- дискретті Марков процестері (Марков тізбектері);
- үздіксіз Марков процестері.

Дискретті Марков тізбегі, дискретті Марков процесі - бұл дискретті күйлердің өзгеруі белгілі бір уақытта болатын кездейсоқ процесс.

Марковтың үздіксіз процесі - бұл дискретті күйлердің өзгеруі кездейсоқ уақытта болатын кездейсоқ процесс.

Сонымен, кез - келген Марков процесі іс жүзінде дискретті процесс болып табылады, бірақ дискретті уақытта (жасанды сандық уақыт торында) немесе үздіксіз (физикалық) уақытта жүреді.

Модельденген процестің келесі ерекшеліктері бар жағдайды қарастырыңыз.

S жүйеде n мүмкін күйлер бар: $S_1, S_2, \dots, S_n$. Жалпы алғанда, күйлердің саны шексіз болуы мүмкін. Алайда, модель, әдетте, күйлердің соңғы санына негізделген.

Күйлердің өзгеруі, бір-бірден және қатаң белгіленген $t_0, t_1, \dots$ уақытта есептейміз. Болашақта уақыт нүктелерін t_i қадамдар деп атаймыз. x_{t_i} жүйенің S_i күйден S_j күйге ауысу ықтималдығы белгілі.

Модельдеудің мақсаты: k кейінгі кезеңдегі жүйенің күйлерінің ықтималдығын анықтау.

Бұл ықтималдықты $x_j(k, i) = \overline{x_{t_i}(k, j)}$ белгілейміз (x_{t_i} ықтималдылығымен шатастырмаймыз).

Егер жүйеде нәтиже болмаса, яғни ықтималдық жүйенің күйде болуының тарихына тәуелді емес, тек осы күймен анықталса, онда сипатталған жағдай дискретті Марков тізбегінің моделіне сәйкес келеді.

Модельдеудің басқа әдістері Салыстырмалы түрде бірнеше «жаңа» әдістер бар, бірақ барлық концепциялар күрделі математикалық моделдермен негізделеді, оларды ашу бұл жұмыстың негізгі міндеті болып табылмайды, сондықтан төменде ерекше атақты модель жағдайы туралы айтылған. Шеткі сандық ықтималдық модельдерінің жағдайы ақырғы автоматтарға (АА) негізделген. Олар $S(i)$ көптеген жағдайларынан және i түрінен j түріне өту ықтималдылығы $P(i, j)$ бар. Әрбір ауысу сирек символмен белгіленеді. Осындай символдардың кез-келген мәтінде тізбектілігі модельде ерекше жол ұсынады (егер де ол бар болса). Мұндай модельдерді жиі Марков модельдері деп атайды, алайда кейде бұл термин контексті-шектелген модельдерді көрсету үшін қолданылады.

7.2 Марков тізбегі

Марков тізбегі-бұл дискретті уақыт пен дискретті күй кеңістігі бар Марков процесі. Сонымен, Марков тізбегі-бұл күйлердің дискретті тізбегі, олардың әрқайсысы Марков қасиетін қанағаттандыратын күйлердің дискретті кеңістігінен (шекті немесе шексіз) алынады.

Марковтың дискретті тізбектері күйлердің өзгеру процесі дискретті болатын жүйелерді сипаттау үшін кеңінен қолданылады. Бұл, мысалы, жаудың артиллериялық соққыларының әр сериясынан кейін танк тобының бірліктері, әр күн (апта, ай және т. б.) белгілі бір уақыт аралығында жұмыс істегеннен кейін таксопарктің жұмыс істейтін машиналарының үлесінің өзгеруі, кейбір техникалық жүйенің элементтерінің істен шығуы және т. б.

$S_1, S_2, \dots, S_n, S_1, S_2, \dots, S_n$ дискретті күйлердің белгілі бір жиынтығымен сипатталатын жүйелерді зерттеген кезде, олардың өзгеруі $1, 2, \dots, k, \dots, T$,

яғни Марковтың кездейсоқ процесін білдіреді, S жүйесінің S_i -нің S_j күйінен S_j күйіне ауысу ықтималдығы белгілі, олар қадамнан қадамға өзгермейді (өйткені тізбек біртекті). P_{ij} ықтималдығы өтпелі ықтималдық матрицасы түрінде берілген:

$$[P_{ij}] = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix},$$

Мұндағы барлық i үшін $\sum_{j=1}^n P_{ij} = 1$, $P_{ij} = const$.

Mathcad қолданбалы пакеті Марков модельдерінің аналитикалық есептеулерінің нәтижелерін және олардың модельдеуін дәлдік пен сенімділік үшін салыстыруға мүмкіндік беретін бірқатар мүмкіндіктерді ұсынады. Мұндай жүйелердің сипаттамалары олардың жұмыс істеу процесінде мүмкін болатын күйлердің әрқайсысында болу ықтималдығы (күйлердің ықтималдығы) болып табылады.

Біртекті Марков тізбегі үшін аналитикалық модельді қарастырыңыз, онда жүйенің күйлерінің өзгеруінің ықтималды сипаттамалары уақыт өте келе тұрақты болады. Модельдеу эргодтық үшін де (кез-келген күйден кез-келген басқа күйге қадамдардың соңғы санына өту мүмкін) және сіңіру тізбектері үшін де мүмкін (тұйық күй бар).

Эргодтық жүйелерде қадамдар санының өсуімен барлық күйлердің ықтималдығы бірліктен басқа белгілі бір мәндерге ұмтылады. Сіңіру жүйелерінде күйлердің біреуінің ықтималдығы бірлікке, ал қалған күйлердің ықтималдығы нөлге ұмтылады. Атап айтқанда, бұзылған элементтерді қалпына келтіруге немесе ауыстыруға болмайтын жүйелер сіңіру қасиеттеріне ие. Зерттеу міндетіне байланысты бірдей жүйе әртүрлі күйлермен сипатталуы мүмкін. Мысалы, таксопарктің төрт машинасынан тұратын топ үшін белгілі бір пайдалану кезеңдерінен кейін машиналардың істен шығу саны мемлекет ретінде қабылдануы мүмкін:

7.3 Марков тізбектері классификациясы

Марковтың кездейсоқ процестері сабаққа бөлінеді. Бірінші классификацияның ерекшелігі - мемлекеттер спектрінің табиғаты. Кездейсоқ процесс (X_t) дискретті күйлерімен процесс деп аталады, егер

мүмкін жүйелік күй болса ξ_1, ξ_2, ξ_3 ...оны тізімдеуге болады және процестің өзі мезгіл-мезгілде бір күйден екінші күйге секіреді.

Мысал. Техникалық құрылғы I және II екі түйіннен тұрады, олардың әрқайсысы сәтсіздікке ұшырауы мүмкін. Мемлекеттер: ξ_1 - екі түйіндер де жұмыс істейді; ξ_2 - бірінші түйіннен бас тартты, екінші жұмысшы; ξ_3 - екінші түйіннен бас тартты, алғашқы жұмысшы; ξ_4 - екі түйіндер де бас тартты.

Үздіксіз күйлері бар процестер бар (мемлекеттен мемлекетке тегіс ауысу), мысалы, жарықтандыру желісіндегі кернеудің өзгеруі. Біз тек дискретті мемлекеттермен бірлескен кәсіпорынды қарастырамыз. Бұл жағдайда жүйенің ықтимал күйлері түйіндермен белгіленетін мемлекеттердің графигін пайдалану ыңғайлы, ал мүмкін болатын ауысулар - бұл доғалар.

Екінші жіктеу мүмкіндігі - уақыттың жұмыс сипаты. Бірлескен кәсіпорын дискретті уақыт процесі деп аталады, егер жүйенің ауысуы, егер жүйеден ауысулар, егер алдын-ала белгіленген уақыттағы алдын-ала белгіленген болса: $t_1, t_2, \dots$. Егер жүйенің жүйеден мемлекетке ауысуы кез-келген мәңгілікке, кездейсоқ кездейсоқ сәтке қол жеткізілсе, олар тұрақты түрде бірлескен кәсіпорын туралы сөйлеседі.

ξ_1 - барлық машиналар жұмыс істейді;

ξ_2 - 1 машинасы істен шықты;

ξ_3 - 2 машина істен шықты;

ξ_4 - 3 машина істен шықты.

Аналитикалық модельге сүйене отырып, біз біртекті Марков жүйесінің $r=4$ дискретті күйлерімен және дискретті уақытпен жұмыс істеуін зерттейміз, онда күйлердің өзгеруі бірдей уақыт аралығында тез жүреді. Олардың жұмысын жүргізушілер немесе механиктер қалпына келтіреді. Жеке машинаны қалпына келтіру мүмкін болмаған жағдайда, таксопарк жаңа немесе қалпына келтірілген қаражат есебінен толықтырылады.

Уақыттың әр сәтінде жүйе тек бір күйде бола алатындықтан, жүйенің бір күйден екінші күйге ауысуы бір қадаммен жүзеге асырылады (машинаның келесі істен шығуы немесе қалпына келтірілген кіріс), яғни әр ауысу процестің қадамымен анықталады. Бұл тізбек эргодикалық болып табылады, өйткені онда кез-келген күйден кез-келген басқа күйге қадамдардың соңғы саны үшін кіруге болады. Эргодтық тізбек үшін уақыт пен жүйенің бастапқы күйіне тәуелсіз асимптотикалық (стационарлық) ықтималдық мәндері бар.

Мәселені шешу үшін бастапқы деректер енгізіледі. Бұл күйлердің

саны, талап етілетін нәтижелердің дәлдігі мен сенімділігі және ауысу ықтималдығының матрицасы. 7.1-суретте Mathcad жүйесіне бастапқы деректерді енгізу тәртібі көрсетілген. Бастапқы деректер ерікті түрде алынады.

Число состояний

$n := 4$

Достоверность

$t\alpha := 2.58$

Точность

$\varepsilon := 0.01$

Матрица переходных вероятностей

$$P_{per} := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.0 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

программа формирования матрицы коэффициентов системы линейных уравнений

$$M := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n-2 \\ \quad \text{for } j \in 0..n-1 \\ \quad \quad c_{i,j} \leftarrow P_{per,j,i} \\ \text{for } i \in 0..n-2 \\ \quad c_{i,i} \leftarrow c_{i,i} - 1 \\ \text{for } j \in 0..n-1 \\ \quad c_{n-1,j} \leftarrow 1 \end{cases}$$

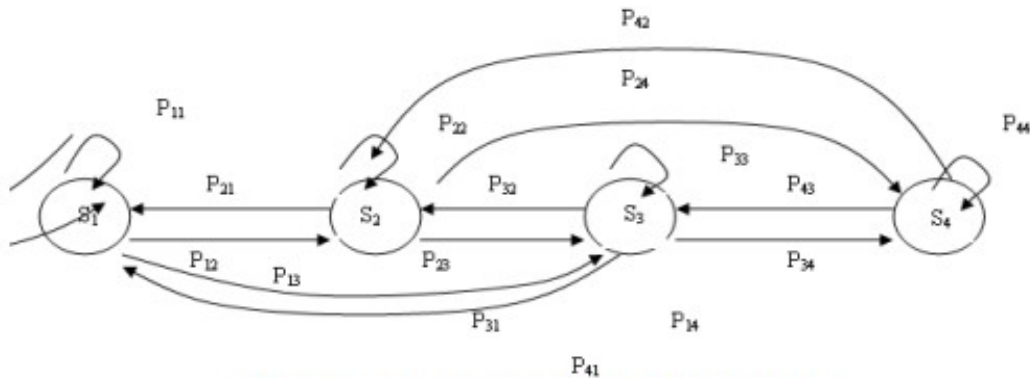
$M = \begin{pmatrix} -0.9 & 0 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & -0.8 & 0.4 & 0 \\ 0.6 & 0.7 & -0.7 & 0.3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$v := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **Вектор свободных членов**

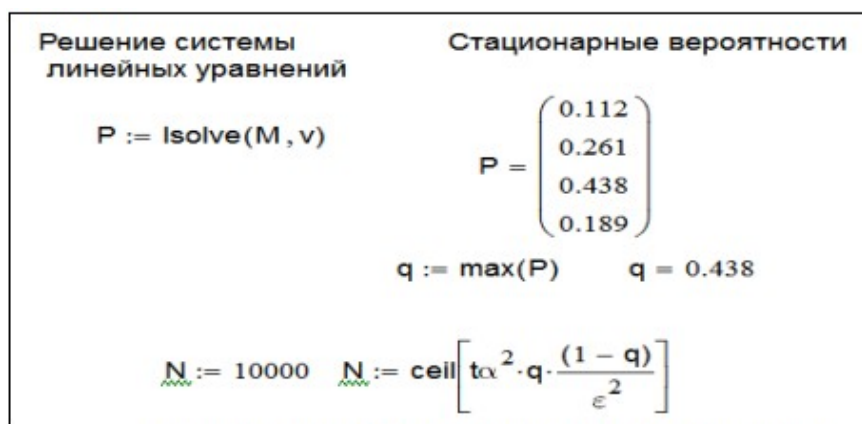
7.1 сурет. Бастапқы деректерді дайындау

Бұл жүйе үшін күйлердің өзгеру графигі 7.2-суретте көрсетілген.

Mathcad-да $MX=B$ түріндегі сызықтық алгебралық тендеулер жүйесін шешу үшін белгісіз x векторын қайтаратын стандартты $lsolve(M,B)$ функциясы қолданылады.



Сурет 7.2. Жүйенің күйлерін өзгерту графигі



Сурет 7.3. Стационарлық ықтималдылықты табу

8-тақырып. Үзіліссіз Марков процесстері

8.1 Үзіліссіз Марков процесстері

Күйлердің үздіксіз өзгеруімен кездейсоқ Марков процесі үздіксіз күйлермен Марков процесі деп аталады.

Дискретті күйлері бар жүйеде күйден күйге ауысу белгілі бір уақытта немесе кездейсоқ сәттерде болуы мүмкін.

Егер уақыт өте келе, жүйенің күйден күйге ауысуы белгілі бір уақытта ғана мүмкін болса, кездейсоқ процесс дискретті процесс деп аталады. Осы сәттер арасындағы уақыт аралығында S жүйесі өзінің күйін сақтайды.

Егер жүйенің күйден күйге ауысуы кез-келген уақытта мүмкін болса, кездейсоқ процесс үздіксіз уақыт процесі деп аталады.

Операцияларды зерттеу кезінде көбінесе бірдей мәселелерді шешуде қайта пайдалануға арналған жүйелермен күресуге тура келеді. Бұл жағдайда пайда болатын процестер қызмет көрсету процестері деп

аталады, ал жүйелер -қызмет көрсету жүйелері (QS). Мұндай жүйелердің мысалдары телефон жүйелері, жөндеу шеберханалары, есептеу кешендері, билет кассалары, дүкендер, шаштараздар және т. б.

Әрбір ЖҚКЖ қызмет көрсету арналары деп аталатын белгілі бір қызмет көрсету бірліктерінен (құралдар, құрылғылар, пункттер, станциялар) тұрады. Арналар байланыс желілері, жұмыс нүктелері, компьютерлер, сатушылар және т.б. болуы мүмкін.

Өтініштер әдетте ЖҚКЖ-ға үнемі емес, кездейсоқ келіп түседі, бұл кездейсоқ өтінімдер (талаптар) деп аталады. Өтінімдерге қызмет көрсету, әдетте, кездейсоқ уақытқа созылады. Өтінімдер ағынының және қызмет көрсету уақытының кездейсоқ сипаты ЖҚКЖ біркелкі жүктелмеуіне әкеледі: кейбір уақыт кезеңдерінде өтінімдердің өте көп саны жиналады (олар кезекке тұрады немесе ЖҚКЖ-ны қараусыз қалдырады), ал басқа кезеңдерде ЖҚКЖ толық жүктелмей жұмыс істейді немесе тұрып қалады.

Жаппай қызмет көрсету теориясының пәні ЖҚКЖ жұмысының берілген шарттарын (арналар саны, олардың өнімділігі, өтінімдер ағынының сипаты және т.б.) оның өтінімдер ағынымен күресу қабілетін сипаттайтын ЖҚКЖ тиімділік көрсеткіштерімен байланыстыратын математикалық модельдерді құру болып табылады.

ЖҚКЖ жұмыс процесі кездейсоқ процесс болып табылады.

Кездейсоқ (ықтималдық немесе стохастикалық) процесс дегеніміз-ықтималдық заңдылықтарына сәйкес кез-келген жүйенің күй уақытындағы өзгеру процесі.

Процесс дискретті күйлері бар процесс деп аталады, егер оның мүмкін күйлері $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots$ алдын-ала тізімделуі мүмкін, ал жүйенің күйден күйге ауысуы бірден жүреді (секіру). Егер жүйенің күйден күйге ауысу сәттері алдын-ала бекітілмеген, бірақ кездейсоқ болса, процесс үздіксіз уақыт процесі деп аталады.

ЖҚКЖ жұмыс процесі дискретті күйлер мен үздіксіз уақыты бар кездейсоқ процесс болып табылады. Бұл ЖҚКЖ жағдайы қандай да бір оқиғалардың пайда болуының кездейсоқ сәттерінде (мысалы, жаңа өтінімнің келуі, қызмет көрсетудің аяқталуы және т.б.) секіріспен өзгеретінін білдіреді. Егер бұл жұмыс процесі марковский болса, QS жұмысының математикалық талдауы айтарлықтай жеңілдетілген. Егер t_0 уақытының кез-келген сәті үшін болашақта процестің ықтималды сипаттамалары тек t_0 сәтіндегі оның күйіне байланысты болса және жүйенің бұл күйге қашан және қалай енгеніне тәуелсіз болса, кездейсоқ процесс Марков немесе кездейсоқ процесс деп аталады.

Марков процесінің мысалы: таксидегі S -есептегіш жүйесі. Т моментіндегі жүйенің жағдайы автомобиль осы сәтке дейін өткен шақырым санымен (километрдің оннан бір бөлігі) сипатталады. T_0 сәтінде

есептегіш ξ_0 көрсетсін. $T = \dots$ кезінде есептегіш ξ_1 километрдің белгілі бір санын (дәлірек айтқанда, рубльдің тиісті санын) көрсету ықтималдығы ξ_0 -ге байланысты, бірақ t_0 -ге дейін есептегіштің көрсеткіштері қай уақытта өзгергеніне байланысты емес.

Көптеген процестерді Марков деп санауға болады. Мысалы, шахмат ойнау процесі; ξ жүйесі-шахмат бөліктерінің тобы. Жүйенің күйі t_0 кезінде тақтада сақталған жау фигураларының санымен сипатталады. $T = \dots$ сәтінде материалдық артықшылықтың қарсыластардың бірінің жағында болу ықтималдығы, ең алдымен, t_0 жүйесінің қазіргі кездегі күйіне байланысты, ал тақталар t_0 сәтіне дейін қашан және қандай ретпен жоғалып кеткеніне байланысты емес.

8.2 Оқиғалар ағындары және операциялары

Оқиғалар ағымы - бұл кездейсоқ сәттерде бірінен кейін бірі жүретін біртекті оқиғалар тізбегі.

Бұл белгілі бір уақыт аралығында бірінен соң бірі болатын оқиғалардың тізбегі.

T -көрші оқиғалар арасындағы орташа уақыт.

Егер $T = \text{const}$ болса, онда ағындағы оқиғалар біркелкі бөлінеді.

λ - ағынның қарқындылығы, яғни уақыт бірлігінде болатын оқиғалардың орташа саны.

Оқиға ағындарының мысалдары-такси қоңырауларының ағымы; дүкенге баратын клиенттердің ағыны; кейбір құрылғылардың жұмысындағы ақаулардың (сәтсіздіктердің) ағымы және т.б. оқиғалар ағынының қарқындылығы (немесе тығыздығы) уақыт бірлігіне келетін оқиғалардың орташа саны деп аталады.

Оқиғалар ағымы қарапайым (Пуассон) деп аталады, егер оған келесі шарттар орындалса:

а) тұрақтылық: уақыт аралығындағы оқиғалардың белгілі бір санының пайда болу ықтималдығы тек осы аралықтың ұзындығына байланысты және осы аралықтың сандық осьтегі жағдайына байланысты емес;

б) салдардың болмауы: кез келген уақыт учаскесінде оқиғалардың белгілі бір санының пайда болу ықтималдығы қарастырылып отырған учаске басталғанға дейінгі уақыт сәттерінде оқиғалардың пайда болуына немесе пайда болмауына байланысты емес (яғни, қиылыспайтын аралықтарда пайда болатын оқиғалар саны тәуелсіз кездейсоқ шамаларды білдіреді);

в) ординарлық: t ұзындық аралығында бірнеше оқиғаның пайда болу

ықтималдығы $P(0)$ шамасы, яғни $P(0) = 1 - P(1)$ ықтималдығы $t \rightarrow 0$ кезінде шексіз кіші шама, t -ге қарағанда жоғары ретті.

Басқаша айтқанда, аз уақыт аралығында екі немесе одан да көп оқиғалардың пайда болу ықтималдығы іс жүзінде жоқ.

8.3 Оқиғалар ағындарымен жасалатын операциялар

Оқиғалар ағынын қарастыру кезінде екі ағындық операция маңызды рөл атқарады-ағындарды қосу және ағынды разрядтау әрекеті.

Ағындарды қосу. Екі ағынның қосындысы I_1 және I_2 деп аталады, онда оқиғалардың пайда болу сәттері I_1 және I_2 ағындарындағы оқиғалардың пайда болу сәттерінен тұрады.

Егер оқиғалардың екі стационарлық ағыны қосылса, онда оқиғалардың жалпы ағыны да тұрақты болады, ал оның қарқындылығы жинақталған ағындардың қарқындылығының қосындысына тең болады. Мұны қорытындылай келе, стационарлық ағындардың соңғы санының қосындысы жинақталған ағындардың қарқындылығының қосындысына тең қарқындылықпен тұрақты ағын беретінін көруге болады.

Тәуелсіз стационарлық қарапайым ағындарды қосқанда, жалпы ағын да қарапайым болады, дегенмен, бір қарағанда, бұл дұрыс емес болып көрінуі мүмкін, өйткені ағындарды қорытындылау кезінде жалпы ағымда екі немесе одан да көп оқиғалардың бір уақытта пайда болуы мүмкін. Белгілі бір уақытта оқиғаның пайда болу ықтималдығы, жинақталған ағындардың стационарлығына байланысты нөлге тең болғандықтан, бұл жиынтық ағындарда оқиғалардың бір уақытта пайда болу ықтималдығы нөлге тең екенін білдіреді. Демек, жалпы ағымда екі немесе одан да көп оқиғалардың ықтималдығы аз уақыт аралығында іс жүзінде жоқ, бұл оқиғалардың жалпы ағымының қарапайымдылығын көрсетеді.

Тәуелсіз ординарлық стационарлық ағындардың кез-келген соңғы санын қосқанда, қарқындылығы жиналмалы ағындардың қарқындылығының қосындысына тең стационарлық ординарлық ағын қайтадан алынатынын көруге болады. Жиынтық ағындардағы "нәтиженің болмауы" қасиеті де жалпы ағынмен мұра болатындығын түсіну қиын емес.

Осылайша, жоғарыда айтылғандардан қорытынды жасауға болады: қарапайым ағындардың соңғы санын қорытындылай келе, жиынтық ағындардың қарқындылығының қосындысына тең қарқындылығы бар қарапайым ағын қайтадан алынады.

Ағынды разрядтау (немесе "елеу"). Оқиғалардың белгілі бір ағымы болсын. Оқиғалардың жаңа ағымы келесідей құрылады: бастапқы ағынның әрбір k-ші оқиғасы сақталады, ал қалғандары тасталады.

Осылайша, оқиғалардың жаңа ағымы бастапқы ағынның барлық k оқиғаларынан тұрады.

Оқиғалардың бастапқы ағымы қарқындылығы λ болатын қарапайым ағын болған жағдайда, осылайша алынған ағын λ параметрі бар k -ретті Эрланг ағыны деп аталады.

k -ретті Эрланг ағынының қарқындылығы тең екенін көрсетуге болады λ/k .

9-тақырып. Инженерлік-экономикалық есептерді шешуде MathCad-ты пайдалану

9.1 Негізгі түсініктер

Инженерлік-экономикалық мәселелерді шешуге арналған құралдарды пайдалану қазіргі уақытта қуатты компьютерлік пакеттердің пайда болуымен байланысты революциялық өзгерістердің төртінші кезеңін бастан кешуде: Mathsad, Mathematica, Mathlab, Derive, Theorist және т.б. (бұл революцияның алғашқы үш кезеңі бір уақытта есеп тақтасының, бухгалтерлік есеп пен микрокалькулятордың пайда болуымен танымал болды).

Сондықтан оқу процесінде инженерлік-экономикалық мәселелерді шешудің дәстүрлі әдістерін синтездеу үшін заманауи ақпараттық технологиялар қолданылады. Көптеген экономикалық оңтайландыру мәселелерін Microsoft Office пакетіне кіретін Excel кестелік процессоры арқылы шешуге болады. Кесте ұяшықтарының есептерін деректермен толтырудан, оларға формулалар енгізуден, командаларды орындаудан және диалогтық терезелерді толтырудан тұратын шешім процесі соңына дейін Автоматты болып табылмайды. Сондықтан үлкен міндеттер ағынын шешуде оңтайлы емес. Mathcad жаңа мүмкіндіктер ашады - математикалық жүйесі автоматты жобалау (Mathematical Computer Aided Design) фирманың MathSoft (АҚШ), ол барған қол жетімді дамуына байланысты компьютерлік техника.

Mathcad компьютерлік алгебра жүйесі - оған символдық математика құралдары біріктірілген, бұл есептерді сандық ғана емес, сонымен бірге жасанды интеллект жүйесі болып табылатын кіріктірілген символдық процессорды қолдана отырып аналитикалық түрде шешуге мүмкіндік береді. Компьютерлік математика - бұл жай ғана құрал, мүмкіндік беретін назар студенттің тұжырымдамалары мен логикасына әдістері мен алгоритмдерін босата отырып, оны меңгеру қажеттілігінен ауқымдылығы, незапоминающихся және сондықтан бесполезных есептеу рәсімдерін. Бірақ бұл құралды тек иллюстрациялық құрал ретінде қолдану тапсырманың физикалық мағынасын түсінбестен қажет емес. Компьютерлік технологиялардың қарқынды дамуына қарамастан, математиканың теориялық негіздерін және инженерлік-экономикалық

есептерді шешудің әдістерін түсіну классикалық теоремалар мен алгоритмдерсіз мүмкін емес.

Оқытудың негізіне көрнекі интерфейсі және әмбебап мүмкіндіктері бар компьютерлік пакет жатуға тиіс.

Mathcad математикалық есептеулерді автоматтандыру үшін біріктірілген жүйе бола отырып, қазіргі уақытта оңтайландырудың экономикалық есептерін шешуге арналған ең танымал пакет. Ол басқа пакеттерден жұмыс парағын еркін құрастыру мүмкіндігімен ерекшеленеді, дәстүрлі тілдерде бағдарламалаудың нәзіктігіне еңбестен есептеулерді, графиктерді орындау процесін тез игереді. Оның негізгі артықшылықтарының бірі-бүгінгі таңда ол - жалғыз математикалық жүйе, онда есептерді шешудің сипаттамасы математикалық формулалардың, символдар мен белгілердің таныс түрінде, сондай-ақ арнайы функцияларға жүгіну жолымен беріледі. Мұндай әдістеме экономика факультетінің кіші курс студенттерін оқу-зерттеу жұмыстарына, саланың инженерлік-экономикалық міндеттерін шешуде заманауи ақпараттық технологияларды пайдалану бойынша тартуға мүмкіндік береді.

Mathcad құжатына енгізілген формулалар автоматты түрде жазудың стандартты ғылыми-техникалық формасына келтіріледі. Есептеу нәтижелері негізінде автоматты түрде жасалған графиктер де формулалар ретінде қарастырылады. Түсініктемелер, сипаттамалар және иллюстрациялар есеп айырысу кезінде еленбейтін мәтіндік блоктарда орналастырылады.

Егер айнымалылардың барлық мәндері белгілі болса, онда өрнектің сандық мәнін (скаляр, векторлық немесе матрицалық) табу үшін барлық сандық мәндерді ауыстырып, барлық әрекеттерді орындау керек.

9.2 Есептеу операторлары

Mathcad бағдарламасында есептеу операторы қолданылады. Есептеу кезінде айнымалы мәндер мен құжатта бұрын көрсетілген функциялардың анықтамалары автоматты түрде қолданылады. Белгілі параметрлердің мәндерін қою, аналитикалық формулаларды қолдана отырып есептеулер жүргізу, нәтижені кейбір айнымалыға тағайындау, содан кейін осы айнымалының мәнін көрсету үшін есептеу операторын пайдалану ыңғайлы. Кез-келген айнымалының мәнін өзгерту, кез-келген формуланы түзету осы мәнге байланысты барлық есептеулерді қайтадан жасау керек дегенді білдіреді. Мұндай қажеттілік параметрлердің немесе шарттардың қолайлы мәндерін таңдағанда, ең жақсы нұсқаны іздегенде, нәтиженің бастапқы жағдайларға тәуелділігін зерттегенде пайда болады. Mathcad бағдарламасында әзірленген электрондық құжат осындай жағдайға дайын. Кез-келген формула өзгерген кезде, Mathcad автоматты түрде өзгертілген мәндерді жаңарту арқылы қажетті есептеулерді жасайды.

MathCAD жүйесінде математикалық есептерді шешудің сипаттамасы таныс математикалық формулалар мен белгілердің көмегімен, сондай-ақ арнайы функцияларға жүгіну арқылы беріледі. Олардың арасында оңтайландыру мәселелерін шешуге арналған maximize, Minimize функциялары да бар - Mathcad 2014 нұсқасында айнымалылар саны 300-ге дейінгі функциялардың максимумы мен минимумын іздеуге арналған.

Экономикада, әдетте сызықтық болып табылатын мақсатты функция үшін осындай мәселелерді шешу шикізат шығындарын, көлік шығындарын азайтуға және тауар өндіруден ең көп пайда алуға мүмкіндік береді. Қарапайым оңтайландыру мәселелерін толығымен автоматты түрде шешу үшін оларды мәтіндік түсіндірмелермен бірге MathCAD жүйесін өңдеу терезесінде жазу керек.

Неғұрлым күрделі тапсырмалар үшін MathCAD жүйесі сызықтық бағдарламалау алгоритмдерін жүзеге асыруды жеңілдетеді, шешім құралын басқа ұқсас тапсырмаларға оңай бейімделетін қорытынды есеппен біріктіреді.

Мәтіндік, формулалық және графикалық редакторларды есептеу ядросымен біріктіру жоғары сапалы дизайнмен (Word редакторындағыдай) және нәтижелерді көрнекі көрсетумен есептеулер жүргізуге қабілетті белсенді электрондық құжаттарды дайындауға мүмкіндік береді. Қорытынды құжаттарды rtf және html форматындағы файлдарға айналдыруға және MS Office пакетінде және интернет, Intranet желілерінде пайдалануға болады. Мұның бәрі күрделі экономикалық мәселелерді шешуге, экономикадағы динамикалық модельдерді талдауға, сондай-ақ кадрларды даярлау мен қайта даярлауға жаңа мүмкіндіктер ашады.

9.3 Сызықтық және сызықтық емес теңдеулер мен олардың жүйелерін шешу

Теңдеулерді шешу – алгебралық немесе трансценденттік-қолданбалы талдаудың маңызды міндеттерінің бірі, сөздің кең мағынасында физика, механика, технология және ғылымның көптеген және әр түрлі бөлімдерінде пайда болатын қажеттілік. Теңдеулерді шешу әдістері екі топқа бөлінеді. Бірінші топқа әртүрлі түрлендірулер арқылы теңдеуді жеңілдетуге және шешімді формула түрінде жазуға мүмкіндік беретін әдістер кіреді. Екінші топ сандық әдістерден тұрады. Бұл жағдайда шешім сандардың үстіндегі амалдарды (егер қаласаңыз, тек арифметикалық) қолдана отырып ізделеді, ал жауап бірден сан түрінде алынады (әдетте шамамен). Бірінші топқа, мысалы, үшінші дәрежелі теңдеулерді шешуге арналған Кардано әдісі, қайтару теңдеулерінің дәрежесін төмендету әдісі және т.б. бұл әдістер кейде пайдалы болуы мүмкін, бірақ олардың практикалық мәні Жалпы аз, өйткені формула мен қажет сандық жауап арасында, әдетте, практикалық есептеулерде әлі де

көп есептеулер бар. Сонымен қатар, бұл әдістер тапсырмалардың салыстырмалы түрде тар шеңберіне ғана қолданылады. Қазіргі уақытта теңдеулер мен олардың жүйелерін шешудің көптеген сандық әдістері бар және қолданылады. Бұл әдістері (итерация, Ньютон, Гаусс, Зейдел және т. б. [7]. Әдістердің әртүрлілігі осы мәселені шешудің тривиалды емес екендігін және оны қолданудың көптеген практикалық салаларын көрсетеді, сонымен қатар келесі жағдайлармен байланысты:

1) теңдеуді немесе теңдеулер жүйесін шешу бір әдіспен басынан аяғына дейін сирек жүзеге асырылады. Әдетте алдымен тамырлар теңдіктер салыстырмалы түрде аз дәлдікпен белгілі бір әдіспен анықталады, содан кейін берілген дәлдікке қол жеткізе отырып, басқа әдістермен "нақтыланады" ;

2) барлық теңдеулер немесе теңдеулер жүйелері үшін бірдей тиімді әдістер жоқ. Әрине, кейбір әдістер кейбір теңдеулер үшін, басқалары үшін ыңғайлы. Бұл айырмашылықты әрдайым алдын-ала анықтау мүмкін емес. Сондықтан, сандық әдістермен шешу процесінде кейде біреуінен бас тартуға және екіншісіне көшуге тура келеді;

3) теңдеулерді сандық әдістермен шешу айтарлықтай есептеу жұмыстарын қажет етеді, бұл алгоритмді әзірлеуді және бағдарламалау тілдерінің бірінде бағдарламаны жазуды қажет етеді.

10-тақырып. Интерполяция және корреляциялық-регрессиялық талдаулар

10.1 Регрессиялық талдаудың бастапқы статистикасы.

Регрессиялық және корреляциялық талдау-зерттеудің статистикалық әдістері. Бұл кез-келген параметрдің бір немесе бірнеше тәуелсіз айнымалыларға тәуелділігін көрсетудің ең көп таралған тәсілдері.

Бір мәндердің (тәуелсіз) тәуелді айнымалыға әсерін көрсетеді. Мысалы, экономикалық белсенді халықтың саны кәсіпорындар санына, жалақы мөлшеріне және басқа параметрлерге қалай байланысты. Немесе: шетелдік инвестициялар, энергия бағасы және т.б. Жалпы ішкі өнім деңгейіне қалай әсер етеді.

Талдау нәтижесі басымдықтарды анықтауға мүмкіндік береді. Және басты факторларға негізделе отырып, басым бағыттардың дамуын болжау, жоспарлау, басқарушылық шешімдер қабылдау.

Регрессия орын алады:

- сызықтық ($y = a + bx$);
- параболалық ($y = a + bx + cx^2$);
- экспоненциалды ($y = a * \exp(bx)$);
- дәрежелік ($y = a * x^b$);

- гиперболалық ($y = b / x + a$);
- логарифмдік ($y = b * \ln(x) + a$);
- көрсеткіштік ($y = a * b^x$).

Корреляциялық талдау бір немесе екі үлгідегі көрсеткіштер арасында байланыс бар-жоғын анықтауға көмектеседі. Мысалы, машинаның жұмыс уақыты мен жөндеу құны, жабдықтың бағасы мен пайдалану ұзақтығы, балалардың өсуі мен салмағы және т. б.

Егер Байланыс болса, онда бір параметрдің жоғарылауы (оң корреляция) немесе екіншісінің төмендеуі (теріс) болуы мүмкін. Корреляциялық талдау талдаушыға бір көрсеткіштің мәні бойынша екіншісінің мүмкін болатын мәнін болжауға болатындығын анықтауға көмектеседі.

Корреляция коэффициенті r -мен белгіленеді, +1-ден -1-ге дейін өзгереді. Әр түрлі салалар үшін корреляциялық байланыстардың жіктелуі әр түрлі болады. 0 коэффициентінің мәні бойынша үлгілер арасында сызықтық байланыс жоқ.

10.2 Регрессиялық талдау

Регрессия (сызықтық) талдау- тәуелді айнымалыға бір немесе бірнеше тәуелсіз айнымалылардың әсерін зерттеудің статистикалық әдісі. Тәуелсіз айнымалылар басқаша регрессорлар немесе болжаушылар деп аталады, ал тәуелді айнымалылар критерийлік айнымалылар болып табылады. Терминология *тәуелді* және *тәуелсіз* айнымалылар тек айнымалылардың математикалық тәуелділігін көрсетеді (*жалған корреляцияны қараңыз*) себеп-салдарлық қатынастар емес.

Регрессиялық талдаудың мақсаттары:

1. Критерий (тәуелді) айнымалының вариациясының детерминизм дәрежесін болжаушылармен анықтау (тәуелсіз айнымалылар);
2. Тәуелді айнымалы мәнді тәуелсіз (дер) көмегімен болжау;
3. Тәуелділердің өзгеруіне жеке тәуелсіз айнымалылардың үлесін анықтау;

Регрессиялық талдауды айнымалылар арасындағы байланыстың болуын анықтау үшін қолдану мүмкін емес, өйткені мұндай байланыстың болуы талдауды қолданудың алғы шарты болып табылады.

Регрессияның математикалық анықтамасы

Қатаң регрессиялық тәуелділікті келесі түрде анықтауға болады. Берілген бірлескен ықтималдық таралуы бар кездейсоқ шамалар болсын. Егер мәндердің әр жиынтығы үшін шартты күту анықталса, онда функция шақырылады **регрессия** шамасы Y шамасы және оның графигі **регрессия сызығы** арқылы, немесе **регрессия тендеуі**.

Тәуелділігі өзгерген кезде Y орташа мәндерінің өзгеруінен көрінеді.

Әрбір бекітілген мәндер жиынтығы үшін шамасы белгілі бір шашыраңқы кездейсоқ шама болып қала береді.

10.3 Регрессия параметрлерін түсіндіру

Параметрлер ішінара корреляция коэффициенттері болып табылады; басқа болжаушылардың әсері шоғырланған кезде түсіндірілетін Y дисперсиясының пропорциясы ретінде түсіндіріледі, яғни ол Y -ді түсіндіруге жеке үлесті өлшейді, модельге предикторларды енгізу тәртібіне тәуелді болады. Мұндай жағдайларда корреляцияны талдау әдістерін және сатылы регрессиялық талдауды қолдану қажет.

Сызықтық емес регрессиялық талдау модельдері туралы сөйлескенде, біз тәуелсіз айнымалыларда бейресми (формальды тұрғыдан алғанда, оны сызықтық регрессияға оңай төмендетуге болады) немесе сызықтық емес (маңызды есептеулерді тудыратын қиындықтыр) туралы айтатынымызға назар аударған. Бірінші типтегі сызықтықсыздықпен, мағыналы көзқарас тұрғысынан, түрдің мүшелерінің моделінде сыртқы түрін ерекшелеу, ерекшеліктер арасындағы өзара әрекеттестіктің болуын көрсететін маңызды және т.б.

11-тақырып. Жаппай қызмет көрсету жүйелері

11.1 Жаппай қызмет көрсетудің жүйелерінің негізгі сипаттамалары

Марковтың кездейсоқ процестер теориясының маңызды қосымшаларының бірі - жаппай қызмет көрсету жүйелері (QS). Мұндай жүйелердің мысалдары - кассалар, телефон станциялары, қызмет көрсету кезегі болатын әртүрлі қызмет көрсету мекемелері. Әрбір осындай жүйе арналар деп аталатын қызмет көрсететін бірліктердің белгілі бір санынан тұрады. Арналарда жаппай қызмет көрсету жүйелерінің өмірлік мысалдарында қызмет етуді жүзеге асыратын адамдар немесе техникалық құрылғылар пайда болады. Қызмет көрсету жүйелері бір және көп арналы болуы мүмкін.

Кез-келген қызмет көрсету жүйесінің жұмысы оған келіп түскен өтінімдер ағынынан өтінімдерді толтырудан тұрады. Жалпы алғанда, өтініштер уақыттың кездейсоқ сәттерінде келеді.

Түскен өтінімге қызмет көрсету біраз уақытқа созылады, содан кейін арна босатылып, келесі өтінімді қабылдауға дайын болады.

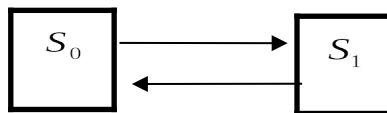
Қызмет көрсету жүйелері теориясының пәні өтінімдер ағынының сипаты, жеке арнаның өндірісі, арналар саны және қызмет көрсету тиімділігі арасындағы байланысты зерттеу болып табылады.

Жаппай қызмет көрсету жүйесі тиімділігінің сипаттамалары ретінде, әдетте, мыналар әрекет етеді: кезек күтудің орташа уақыты; келіп түскен өтінімнің дереу қызмет көрсетуге қабылдану ықтималдығы; бас тартуды алатын және жүйеден кеткен өтінімдердің орташа пайызы және басқа да бірқатар сипаттамалар.

Осы сипаттамалардың әрқайсысы белгілі бір жағынан жүйенің өткізу қабілеттілігін сипаттайды. Жүйенің өткізу қабілеттілігі, әдетте, жүйенің уақыт бірлігіне қызмет ете алатын орташа саны, қызмет көрсетілген өтінімдер санының берілген өтінімдер санына жанама қатынасы ретінде түсініледі.

Кездейсоқ процестер кез-келген қызмет көрсету жүйесімен байланысты: бос арналар санының өзгеруі; кезекте тұрған өтінімдер санының өзгеруі және т.б. мұндай кездейсоқ процестер әдетте уақыт бойынша үздіксіз және жүйенің көптеген күйлеріне қатысты дискретті болады. Бір күйден басқа күйге ауысу қандай да бір оқиға болған кезде пайда болады (жаңа өтінімнің келуі, арнаның босатылуы және т.б.).

Жаппай қызмет көрсету жүйесінің мысалы ретінде рим бір арналы телефон желісінің жұмысын қарастырады, онда арна жұмыс істейтін өтініш жүйеден кетеді ("бас тарту"алады). Бұл үздіксіз уақыт пен екі мүмкін күйі бар дискретті жүйе: S_0 - арна бос; S_1 - арна бос емес. Осы жүйенің күй графигі келесі түрге ие:



Қызмет көрсету жүйесінде болатын кездейсоқ процесті сипаттау үшін жүйенің бір күйден екінші күйге ауысу себептерін түсіну керек. Бұл өтулердің негізгі факторы-өтінімдер ағыны. Сондықтан, жаппай қызмет көрсетудің математикалық сипаттамасы өтінімдер ағынынан басталады.

Жүйенің жұмысы тек өтінімдердің кіріс ағынына ғана емес, сонымен қатар жүйенің өнімділік сипаттамаларына да байланысты: каналдар саны және әр арнаның жылдамдығы. Қызмет көрсету жүйесімен байланысты маңызды шамалардың бірі - $T_{\text{кк}}$ - бір өтініміне қызмет көрсету уақыты.

Тәжірибе үшін ерекше қызығушылық - бұл $T_{\text{кк}}$ дәрежесі индикативті үлестірімге ие болған жағдайда* тығыздық функциясы бар $f(t) = \mu e^{-\mu t}, t. > 0$, мұндағы μ - бір өтінімге қызмет ету үшін орташа уақытқа кері шама, яғни $\mu = \frac{1}{M(T_{\text{кк}})}$.

Қызмет көрсету жүйелері кіріс өтінімдер ағынының сипатына, $T_{\text{кк}}$ кездейсоқ шамасын бөлуге және қызмет көрсету арналарының санына байланысты бөлуден басқа, істен шығу жүйелеріне және күту жүйелеріне бөлінеді.

Бас тарту жүйелерінде барлық қызмет көрсету арналары бос емес кезде келіп түскен өтінім дереу бас тартуды алады, жүйеден кетеді және қызмет көрсету процесіне қатыспайды.

Күту жүйелерінде барлық арналарды бос қалдырған өтініш жүйеден кетпейді, бірақ кезекке тұрады және кез-келген арна босатылғанша күтеді.

Егер кезек күту уақыты шектеусіз болса, онда жүйе "күту жүйесі" деп аталады. Егер ол қандай да бір жағдайға байланысты болса, онда жүйе "аралас типтегі жүйе" деп аталады. Тәжірибе үшін аралас типтегі жүйелер үлкен қызығушылық тудырады. Күтуге қойылған шектеулер әртүрлі болуы мүмкін. Әдетте, бұл күту уақытының шегі немесе кезек ұзындығының шектеулері. Сонымен қатар, күту жүйелерінде кезекке қызмет көрсетуде басымдық енгізілуі мүмкін (мысалы, Ұлы Отан соғысының ардагерлеріне кезектен тыс қызмет көрсетіледі), яғни. бұл жүйелерде кейбір мәлімдемелер басқаларына қарағанда маңызды.

Әрі қарай, жаппай қызмет көрсету жүйелерінің кейбір нақты түрлерін қарастырамыз.

11.2 Бас тартумен көпарналы жаппай қызмет көрсету жүйелері

n - арналы бар тартумен жаппай қызмет көрсету жүйесі болсын. Оны келесі соңғы күйлері бар S жүйесі ретінде қарастырыңыз:

S_0 - барлық арналар бос;

S_1 - тек бір арна бос емес;

.....

S_k - k арналары бос емес;

.....

S_n - барлық n арналары бос емес.

t уақытындағы S жүйесінің S_k жағдайындағы $p_k(t) (k=0,1,...,n)$ ықтималдылықты анықтаймыз келесі шарттарда анықтаймыз:

а) өтінімдер ағыны қарқындылығы λ болатын қарапайым (Пуассон) болып табылады;

б) T_{kk} бір өтінімнің қызмет көрсету уақыты - $\mu = \frac{1}{m_{t_{kk}}}$ параметрі бар көресткіш, мұндағы $m_{t_{kk}}$ - бір өтінімге қызмет көрсетудің орташа уақыты.

Кездейсоқ шаманың T_{kk} тығыздығы функциясы келесідей:
 $f(t) = \mu e^{-\mu t} \quad (t > 0).$

Біздің шарттарымызға сәйкес S_{k-1} ден S_k -ге ауысу $\lambda (k=1,2,...,n)$ қарқындылығымен жүзеге асырылады.

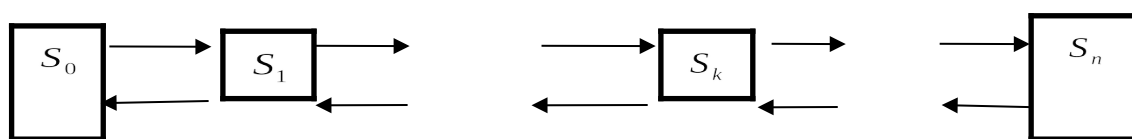
Әрі қарай, S жүйесінің S_k күйінен $S_{k-1} (k=1,2,...,n)$ күйіне кері ауысуын жүзеге асыратын қызмет көрсетілген өтінімдер ағындарының қандай қасиеттері бар екендігі туралы мәселені қарастырамыз.

μ параметрі бір арнадағы өтініштер ағынының қарқындылығы

екенін ескеріңіз.

Сондай-ақ, кездейсоқ шаманың T_k тығыздық функциясы $f(t) = \mu e^{-\mu t}$, ал бұл бір арнадағы ток бойынша пуассондық болып табылады деген қорытынды жасауға мүмкіндік береді. k арналарында қызмет көрсетілген өтінімдер ағынының әр арнада қызмет көрсетілген өтінімдер ағындарының қосындысы бар екенін түсіну қиын емес. Бұл жағдайда барлық арналар тең. Сондықтан k арналарында қызмет көрсету ағынының қарқындылығы $k \cdot \mu$ болады.

Осылайша, жүйенің күйден күйге өту мүмкіндіктері туралы алынған ақпаратты графикке көрсете отырып, біз осы графиктің келесі түріне ие боламыз:



Әрі қарай, S жүйесінің графигінің түріне сүйене отырып, жүйеде жүретін кездейсоқ процесс Марковтың жойылуы мен шектеулі жиынтығы бар көбею процесі болатындығын атап өтеміз.

Колмогоровтың дифференциалдық теңдеулер жүйесін t уақытындағы S жүйесінің S_k күйлерінің $p_k(t)$ ықтималдықтары үшін жазамыз.

Бізде келесі жүйе бар:



Бұл теңдеулер жүйесі Эрланг теңдеулер жүйесі деп те аталады.

Әрі қарай, S жүйесі үшін $t \rightarrow \infty$ кезінде p_k шекті ықтималдығы бар екенін көрсетуге болады.

11.3 Жаппай қызмет көрсету жүйелерін компьютерлік модельдеу

Егер зерттелінетін ЖҚЖЖ үшін оның сипаттамаларын бағалауға арналған аналитикалық көріністі алу мүмкін болмаған немесе берілген көрініс практикада қолдану үшін тым күрделі болып шыққан жағдайда, ЖҚЖ тиімділігін компьютерлік модельдеу көмегімен зерттеуді орындауға болады. ЖҚЖ модельдеудің әр түрлі тәсілдерінің нақты мысалдары қарастырылған. ЖҚЖ модельдеу үшін алгоритмдерді құру әдісінің келесі

негізгі әдістері қолданылуы мүмкін:

- ауыспалы қадамы бар мезгілді модельдеуі (немесе модельді уақыттың уақиғадан уақиғаға қозғалу әдісі);
- тұрақты қадамы бар мезгілді модельдеу;
- өтініштің тізбекті өткізуі;
- өтініштің сатылы тізбекті өткізілуі.

Берілген алгоритмдер бір мәннен басқасына модельді уақыт сағатында сақталатын модельді уақыттың қозғалу әдісімен ерекшелінеді. Бірінші екі алгоритмдердің мәнін қысқаша қарастырайық, одан кейін көбіне ЖҚКЖ модельдеу кезінде қолданылатын өтініштің тізбекті өткізілу әдісін егжей-тегжейлі сипаттайық. Уақыттың уақиғадан уақиғаға қозғалуын пайдалану кезінде бастапқы күйдегі модельді уақыттың сағаты нөлге орнатылады және жүйе күйінің өзгеруіне әкеп соғатын болашақ уақиғаның пайда болу уақыты анықталынады. Осыдан соң модельді уақыт сағаты жақын уақиғаның пайда болу уақытына өтеді және сол мезетті к өткен уақиғаны ескере отырып жүйе күйі, сонымен қатар болашақ уақиғаның пайда болу уақыты жайлы мәлімет жаңаланады. Кейін модельді уақыт сағаты келесі жақын уақиғаның пайда болу уақытына жылжиды, жүйе күйі жаңаланады және болашақ уақиға уақыты анықталынады және с.с. модельді уақыттың бір уақиғаның пайда болу уақытынан басқасының пайда болу уақытына жылжу процесі алдын-ала көрсетілген қандай да бір тоқтату шарты орындалмағанға дейін жалғасады. Осындай имитациялық модельде барлық өзгерістер тек уақиға пайда болған кезде ғана орын алатындықтан, жүйенің әрекетсіздік периоды жай өткізіп жіберіледі және сағат бір уақиғаның пайда болу уақытынан басқасының пайда болу уақытына ауыстырылады. Тұрақты қадамы бар модельді уақыттың жылжуы кезінде модельді уақыт сағаты нақты Δt мәніне арналған уақыттың дәл Δt бірлігіне жылжиды. Сағаттың әр жаңаруынан кейін алдыңғы уақыт Δt интервалы аралығында қандай да бір уақиға жүргенін анықтау мақсатымен тексеру орындалады. Егер осы интервалға бір немесе бірнеше уақиға жоспарланған болса, берілген уақиға интервалдың аяғында жүрді деп есептелінеді, содан кейін жүйенің күйі мен статистикалық есептегіштер сәйкесінше жаңарады. Тұрақты қадам арқасында уақыттың жылжуы екі кемшілікке ие:

- уақиғаның жүру аралығында интервал соңындағы уақиғаны өңдеумен байланысты қатенің пайда болуы;
- егер шынымен де әр түрлі уақытта жүретін уақиға бір уақыттық деп қарастырылса, қандай уақиғаны бірінші өңдеуді шешу қажеттілігі. Осындай мәселелерді Δt интервалын ұзақтығы азырақ қылып жартылай шешуге болады, бірақ онда уақиғаның пайда болуын тексеру саны артады, ол тапсырманың орындалу уақытының көбеюіне әкеліп соғады. Осыдан ЖҚКЖ модельдеуде тізбекті уақиғалар арасындағы уақыт интервалдары ұзақтығы бойынша біршама ерекшеленетін кезде, тұрақты қадам көмегімен уақыттың жылжуы қолданылмайды. Бірқатар жағдайда ЖҚКЖ

өтінішке қызмет көрсету процестерін модельдеу кезінде өтінішті тізбекті өткізу әдісі бойынша модельдеуші алгоритм құрған ыңғайлы. Бұл әдіс жүйеде жүріп жатқан уақиғалар бір біріне тәуелді болмаған кезде қолданылуы мүмкін. Модельдеуші алгоритм жеке өтініштердің тарихын олардың жүйегі түсу тәртібінде бірізді қайта жаңғыртады. Алгоритм басқа өтініштер жайлы ақпаратқа берілген өтінішке одан әрі тәртіпте қызмет көрсету жайлы мәселені шешу үшін қажет болса ғана жүгінеді. Тізбекті өткізілім әдісінің екі түрі бар:

- жалғыз өтінішті өткізу;
- өтініш ағысын өткізу.

Берілген әдіс өтініштің қалыптасу және қызмет көрсету ретімен ғана ерекшеленеді. Бірінші күтілімі бар бір каналды ЖҚКЖ модельдеуге қолданылатын жалғыз өтінішті өткізу әдісін қарастырайық. Модельдеу процесінде кезекті өтінішті қалыптастыру (бұл үшін өтініштің келу уақытының арасындағы уақыт интервалын анықтайтын кездейсоқ сан мен оған қызмет көрсетудің кездейсоқ уақыты түрлендіріледі) және қызмет көрсету уақытының басталуы мен аяқталуын анықтап, оның қызмет көрсетуін орындау қажет. Модельдеудің басында модельді уақыт сағаты нөлге орнатылады. Бірінші өтініш жүйеге $t_1 = A_1$ уақыт мезетінде түсті делік. Мұнда t_1 – өтініштің түсуі арасындағы уақыт болып табылатын кездейсоқ шаманы іске асыру. Уақыт t_1 мезетінде қызмет көрсету каналы бос болғандықтан, өтінішке қызмет көрсету уақыт $t_{k1} = t_1$ мезетінде басталады. Кейін бірінші t_2 өтінішке қызмет көрсету уақытының кездейсоқ шамасын алу керек. Сонда 1-ші өтінішке қызмет көрсету мезетінің аяқталуы $t_{k1} = t_{-1} + t_1$. Сонымен қатар қызмет көрсетілген өтініштің есептегіш санына бірлік қосылады. Одан әрі келесі 2-ші өтініштің түсу уақыты анықталады. Ол үшін өтініштің t_2 түсуі арасындағы уақыт қалыптастырылады және 2-ші өтініштің түсу уақытының мезетін анықталынады $t_2 = t_1 + A_2$. Егер берілген мезетте, мысалы канал бос болмаса, онда 2-ші өтініш үшін ұзақтығы $\Delta t_{\text{түт}} = t_{k1} - t_2$ күту периоды басталады. Бұл өтінішке қызмет көрсету $t_{k2} = t_{k1}$ мезетінде басталады. Одан әрі 2-ші өтінішке қызмет көрсету уақытының кездейсоқ шамасын t_2 анықталынады. Онда 2-ші өтінішке қызмет көрсетудің аяқталу мезеті $t_{k2} = t_{k1} + t_2$. Қызмет көрсетілген өтініш есептегішінің санына бірлік қосылады. Кейінгі өтініштерге ұқсас тәсілмен қызмет көрсетіледі.

12-тақырып. Бас тартумен берілген бірканалды ЖҚКЖ модельдеу

12.1 Модель сипаттамасы.

Бас тартуы бар бір арналы ЖҚКЖ — бұл бір қызмет көрсету арнасы бар, бірақ кезек жоқ: егер өтінім келіп түссе, арна бос болған кезде, оған дереу арна қызмет көрсетеді, егер өтінім келіп түссе-арна бос емес болса, онда өтініш жүйеден кетеді (жоғалады).

Бас тартуы бар бір арналы ЖҚКЖ математикалық моделі:

$$\begin{cases} \dot{p}_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ \dot{p}_1(t) = \lambda p_0(t) - \mu p_1(t) \\ p_0(t) + p_1(t) = 1 \\ p_0(0) = 1, p_1(0) = 0 \end{cases}$$

Бір арналы ЖҚКЖ-ның кірісіне λ қарқындылығымен қарапайым өтінімдер ағыны түседі.

Арнаға қызмет көрсетудің қарапайым ағынының қарқындылығы μ .

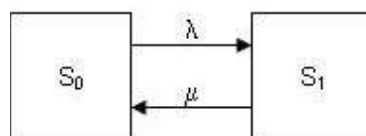
Егер өтінім арнаны бос қалдырса, ол қызмет көрсетуге қабылданады және арна қызмет көрсетеді.

Егер өтінім арнаны бос қалдырмаса, онда ол бас тартады (жүйеден қызмет көрсетілмейді).

Өтінімге қызмет көрсету аяқталғаннан кейін арна босатылады.

Қарастырылған жүйенің күйін біз жүйеде орналасқан өтінімдер санымен байланыстырамыз.

12.2 Бағандардың жағдайы



Сурет 12.1. Бас тартумен бір арналы ЖҚКЖ

S_0 - жүйеде өтініш жоқ, арна бос;

S_1 - жүйеде өтініш бар, оған арна қызмет етеді.

12.3 Колмогоровтың дифференциалдық теңдеуі

$$\begin{aligned}\frac{dP_0}{dt} &= -\lambda \cdot P_0 + \mu \cdot P_1 \\ \frac{dP_1}{dt} &= -\mu \cdot P_1 + \lambda \cdot P_0 \\ P_0 + P_1 &= 1\end{aligned}$$

P_0 - өтінімге қызмет көрсету ықтималдығы;

P_1 – бас тарту ықтималдығы;

Осыдан біз S_0 және S_1 күйлерінде бас тартуы бар ЖҚКЖ табу

$$P_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda}$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}$$

ықтималдығының мәндерін табамыз.

q салыстырмалы өткізу қабілеті мына формула бойынша анықталады:

$$q = P_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda}$$

Абсолютті өткізу қабілеті A мына формула бойынша табылады:

$$A = \lambda q = \frac{\lambda \mu}{\mu + \lambda}$$

Бас тарту ықтималдығы- P_{bt} :

$$P_{bt} = P_1 = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}$$

Жаппай қызмет көрсету теориясының негізін қалаушы - А. К. Эрланг 1900-1930 жж. Бұл теория, ең алдымен, телефонияда дами бастады.

13-тақырып. Бас тартумен берілген көпканалды ЖҚКЖ модельдеу

13.1 Бас тартумен көпарналы жаппай қызмет көрсету жүйелері

n - арналы бар тартумен жаппай қызмет көрсету жүйесі болсын. Оны келесі соңғы күйлері бар S жүйесі ретінде қарастырыңыз:

S_0 - барлық арналар бос;

S_1 - тек бір арна бос емес;

.....

S_k - k арналары бос емес;

.....

S_n - барлық n арналары бос емес.

T уақытындағы S жүйесінің S_k жағдайындағы $p_k(t)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) ықтималдылықты анықтаймыз келесі шарттарда анықтаймыз:

а) өтінімдер ағыны қарқындылығы λ болатын қарапайым (Пуассон) болып табылады;

б) T_{kk} бір өтінімнің қызмет көрсету уақыты $\mu = \frac{1}{t_{kk}}$ көресткіш,

мұндағы t_{kk} - бір өтінімге қызмет көрсетудің орташа уақыты.

Кездейсоқ шаманың T_{kk} тығыздығы функциясы келесідей:

$$(t > 0) \quad f(t) = \mu e^{-\mu t}$$

Біздің шарттарымызға сәйкес S_{k-1} ден S_k -ге ауысу λ ($k = 1, 2, \dots, n$) қарқындылығымен жүзеге асырылады.

Әрі қарай, S жүйесінің S_k күйінен S_{k-1} ($k = 1, 2, \dots, n$) күйіне кері ауысуын жүзеге асыратын қызмет көрсетілген өтінімдер ағындарының қандай қасиеттері бар екендігі туралы мәселені қарастырамыз.

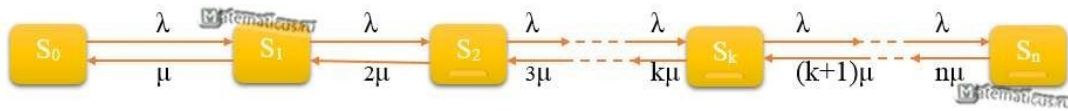
μ параметрі бір арнадағы өтініштер ағынының қарқындылығы екенін ескеріңіз.

Сондай-ақ, кездейсоқ шаманың T_{kk} тығыздық функциясы $f(t) = \mu e^{-\mu t}$, ал бұл бір арнадағы ток бойынша пуассондық болып табылады деген қорытынды жасауға мүмкіндік береді. k арналарында қызмет көрсетілген өтінімдер ағынының әр арнада қызмет көрсетілген өтінімдер ағындарының қосындысы бар екенін түсіну қиын емес. Бұл жағдайда барлық арналар тең.

Сондықтан k арналарында қызмет көрсету ағынының қарқындылығы $k \cdot \mu$ болады.

13.2 Бағандардың күйі

Осылайша, жүйенің күйден күйге өту мүмкіндіктері туралы алынған ақпаратты графикке көрсете отырып, біз осы графиктің келесі түріне ие боламыз:



Әрі қарай, S жүйесінің графигінің түріне сүйене отырып, жүйеде жүретін кездейсоқ процесс Марковтың жойылуы мен шектеулі жиынтығы бар көбею процесі болатындығын атап өтеміз.

Колмогоровтың дифференциалдық теңдеулер жүйесін t уақытындағы S жүйесінің S_k күйлерінің $p_k(t)$ ықтималдықтары үшін жазамыз.

Бізде келесі жүйе бар:

$$\begin{aligned}
 p_n(t) &= -\lambda \cdot p_n(t) + u \cdot p_{n-1}(t), \\
 \dots \dots \dots \\
 p_k(t) &= -\lambda \cdot p_{k+1}(t) + (\lambda + v_{k+1}) \cdot p_k(t) - (v_k + v_{k+1}) \cdot u \cdot p_{k-1}(t) + v_k \cdot (1-v_k), \\
 \dots \dots \dots \\
 p_0(t) &= 1 - p_{n-1}(t) + n \cdot u \cdot p_1(t), \\
 p_1(t) + \dots + p_n(t) &= 1.
 \end{aligned}$$

Бұл тендеулер жүйесі Эрланг тендеулер жүйесі деп те аталады.

Әрі қарай, S жүйесі үшін $t \rightarrow \infty$ кезінде p_k шекті ықтималдығы бар екенін көрсетуге болады.

Осы шекті ықтималдылықты p_k табыңыз.

p_k ықтималдығына арналған Колмогоров дифференциалдық теңдеулер жүйесі келесі түрге ие:

$$\begin{cases} -\lambda * p_0 - \mu * v_0 = 0, \\ \lambda * v_0 - (\lambda + \mu) * p_1 + 2\mu * p_0 = 0, \\ \dots \\ \lambda * p_{k-1} - (\lambda + k * \mu) * p_k + (k + 1) * \mu * p_{k+1} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \\ \dots \\ \lambda * p_{r-1} - (\lambda + (r-1) * \mu) * p_r + (r-1) * \mu * v_r = 0, \\ \mu * p_{r+1} - \mu * v_r * p_r = 0, \\ v_1 + v_2 + \dots + v_r = 1. \end{cases}$$

Бірінші теңдеуден бізде $p_0 = \frac{1}{\lambda} * \mu * v_0$, екінші теңдеуден $v_0 = \frac{\lambda}{\mu} * p_0$

қоя отырып, $p_1 = \frac{\lambda * \mu}{2\mu^2} * v_0$ аламыз. Соған сәйкесінше, үшінші теңдеуден

$p_2 = \frac{\lambda^2}{3\mu^2} * p_0$ аламыз. Жалпы жағдайда бізде $p_k = \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} * p_0$ шығады.

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$$

параметрін енгізейік. λ параметрі берілген қарқындылық деп аталады. Бұл бір өтінімге қызмет көрсетудің орташа уақытына келетін өтінімдердің орташа саны, себебі $\left[\frac{\lambda}{\mu} \right] = \lambda * M_{\text{сер}} = \lambda * M[M_{\text{сер}}]$.

$p_k = \frac{1}{n!} * p_0, (k = 1, 2, \dots, n)$ теңдеуі бар делік. $p_0 + \dots + p_n = 1$ болғандықтан,

$$p_0 + \frac{0}{1!} * p_0 + \dots + \frac{x}{n!} * p_0 = 1 \quad \text{шығады, бұндағы} \quad p_0 = \frac{1}{1 + \frac{0}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!}}$$

Осыдан шығатыны:

$$p_k = \frac{\frac{x^k}{k!}}{1 + \frac{0}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!}}$$

Бұндағы $k = 0, 1, \dots, n$.

p_k мәндерін беретін формулалар Эрланг формулалары деп аталады.

$$1 + \frac{0}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \quad \text{өрнектің мәнін есептеу кезінде}$$

$$e^x = 1 + \frac{0}{1} + \frac{x^0}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

формуласы қолданылады, ал жуықтаудың абсолютті қателігі

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x$$

өрнегінің мәндерінен аспайды, одан α және n мәндерінде шамамен алынған формула рұқсат етілген қателік беретінін анықтау оңай.

Сондай-ақ, егер $\alpha < 1$ болса, онда $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x = 2,718 \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ екенін

ескеріңіз, және қатені бағалау үшін $2,718 \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ өрнегін пайдалануға болады.

13.3 Бас тартулары бар көпарналы жаппай қызмет көрсету жүйесінің сипаттамалары

Әрі қарай, бас тартулары бар көп арналы жаппай қызмет көрсету жүйесінің кейбір сипаттамаларын қарастырамыз.

Қызмет көрсетуден бас тарту ықтималдығы (барлық арналардың бос болу ықтималдығы) келесі формуламен көрсетіледі:

$$r_{\varphi} = p_1 + \frac{\frac{(\varphi^2)}{q}}{1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!}}$$

Өтінімге қызмет көрсету ықтималдығы (жүйенің салыстырмалы өткізу қабілеті) келесі формуламен көрсетіледі:

$$P_{\text{қызмет}} = 1 - P_{\text{от}} = 1 - \frac{\frac{\alpha^n}{n!}}{1 + \frac{\alpha}{1!} + \dots + \frac{\alpha^n}{n!}} = \frac{1 + \frac{\alpha}{1!} + \dots + \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}}{1 + \frac{\alpha}{1!} + \dots + \frac{\alpha^n}{n!}}$$

Атап айтқанда, бір арналы жүйе үшін $(n=1)$ $P_{\text{от}} = P_{\text{қызмет}} = \frac{x}{1+x}$, ал салыстырмалы өткізу қабілеті (яғни, қызмет көрсетуге өтінімді қабылдау ықтималдығы)

$$Q = 1 - P_{\text{от}} = \frac{1}{1+x}$$

Жеке арнада өтінімге қызмет көрсетудің орташа уақыты:

$$\tau_{\text{ор}} = \frac{1}{\mu}$$

Қызмет көрсетумен айналысатын арналардың орташа саны

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \sum_{i=0}^n i \cdot P_i \\ &= 0 \cdot \left(\frac{\frac{\alpha}{1!}}{1 + \frac{\alpha}{1!} + \dots + \frac{\alpha^n}{n!}} \right) + 1 \cdot \left(\frac{\frac{\alpha^2}{2!}}{1 + \frac{\alpha}{1!} + \dots + \frac{\alpha^n}{n!}} \right) + \dots + n \cdot \left(\frac{\frac{\alpha^n}{n!}}{1 + \frac{\alpha}{1!} + \dots + \frac{\alpha^n}{n!}} \right) \\ &= \alpha \cdot \left(\frac{1 + \frac{\alpha}{1!} + \dots + \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}}{1 + \frac{\alpha}{1!} + \dots + \frac{\alpha^n}{n!}} \right) \end{aligned}$$

14-тақырып. Кезекпен берілген көпканалды ЖҚКЖ модельдеу

14.1 Кезек ұзындығы шектеулі көпарналы ЖҚКЖ

Күту (кезек) бар көп арналы ЖҚКЖ барлық арналардың бос емес екенін және жүйеде қандай да бір қызмет көрсету арнасы босатылғанша өтінімді күтетінін білдіреді. Арна босатылған кезде оның кірісіне кезектен бір өтініш түседі.

S_0 - барлық арналар бос

S_1 - бір арна бос емес, қалғандары бос

S_2 - екі арна бос емес, қалғандары бос

S_k - k арналары бос емес, қалғандары бос

S_n -Барлық n арналары бос емес

S_{n+1} -Барлық n арналары бос емес, бір транзакция кезекте

S_{n+r} -Барлық n арналары бос емес, r транзакциялар кезекте

S_{n+m} -Барлық n арналары бос емес, m транзакциялар кезекте

Күтумен берілген көпарналы ЖҚКЖ күйлерінің графигі



Өтінімдер ағынының қарқындылығы ρ тең:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Шектелген кезегі бар көпарналы ЖҚКЖ күйлерінің ықтималдық формулалары:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{nn!} + \dots + \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!}} P_{n+s} = P_0 \frac{\rho^{n+s}}{n^s n!} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{nn!} \cdot \frac{1 - (\frac{\rho}{n})^m}{1 - \frac{\rho}{n}}}$$

$$P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0$$

$$P_{n+m} = P_0 \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!}$$

Барлық арналардың қызмет көрсетумен және кезекте с болу ықтималдығы:

$$P_{\text{отк}} = P_0 \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!}$$

Бас тарту ықтималдылығы тең:
Шексіз кезегі бар көпарналы ЖҰКЖ-де кезектің пайда болу ықтималдығы:

$$P_{оч} = \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m}{1 - \frac{\rho}{n}} P_0$$

Салыстырмалы өткізу қабілеті q тең:

$$q = 1 - P_{отк}$$

Абсолютті өткізу қабілеті:

$$A = \lambda q$$

Кезектегі өтінімдердің орташа саны формуласы:

$$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{nn!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m (m + 1 - \frac{m}{n}\rho)}{(1 - \frac{\rho}{n})^2} P_0$$

$K_{орт}$ алынған арналардың орташа санының формуласы:

$$k_{орт} = \frac{A}{\mu} = \rho q$$

Транзакциялардың (өтінімдердің) орташа саны:

$$L = L_{кезек} + k_{орт}$$

Кезек күтудің орташа уақыты:

$$T_{кез} = \frac{L_{кез}}{\lambda} = \rho q$$

Жаппай қызмет көрсету жүйесінде транзакцияның орташа уақыты:

$$T_{ЖКЖ} = \frac{L}{\lambda}$$

14.1 Шексіз кезек ұзындығымен (күту) көпарналы ЖҚКЖ

Шексіз кезегі бар көп арналы ЖҚКЖ күйлерінің ықтималдық формулалары:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}}$$

$$P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0$$

$$P_{n+m} = P_0 \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!}$$

Кезектің пайда болу ықтималдығы:

$$P_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} P_0$$

Кезектің орташа ұзындығы:

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{nn! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} P_0$$

Бас тарту ықтималдығы- $P_{\text{бт}}$

:

$$P_{\text{бт}} = 0$$

Салыстырмалы өткізу қабілеті q тең:

$$q = 1 - P_{\text{отк}} = 1$$

Абсолютті өткізу қабілеті A :

$$A = \lambda q = \lambda$$

15-тақырып. Күрделі ЖҚКЖ имитациялық модельдеу

15.1 Қызмет көрсету жүйесінің элементтері

Көптеген экономикалық жүйелер-бұл негізінен қызмет көрсету жүйелері (ЖҚКЖ), яғни бір жағынан кез-келген қызметті орындау талаптары бар жүйелер, ал екінші жағынан бұл талаптар қанағаттандырылады

Ақпараттық-есептеуіш қызмет көрсету жүйесінің мысалын қолдана отырып, модельдеудің негізгі элементтері мен жалпы принциптерін қарастырыңыз. Әрбір ЖҚКЖ жалпы жағдайда келесі негізгі элементтерден тұрады:

- қызмет көрсету блогы;
- қызмет көрсетуге өтінімдер ағыны;
- қызмет көрсетуді күту кезегі.

Қызмет көрсету блоктары бірнеше параметрлер бойынша бір-бірінен ерекшеленуі мүмкін. Біріншіден, қызмет көрсету блоктары бір арналы немесе көп арналы болуы мүмкін. Қызмет көрсету арнасы деп қызмет көрсететін құрылғылар (байланыс құрылғылары, деректерді өңдеу, басып шығару құрылғылары, жад құрылғылары және т.б.) түсініледі. Екіншіден, әр арна бір уақытта бір немесе бірнеше өтінімге қызмет ете алады. Үшіншіден, қызмет көрсетуден кейінгі өтініш жүйеден кетуі мүмкін (бір фазалы қызмет көрсету жүйесі) немесе қызмет көрсету арналарының белгілі бір тізбегінен өтуі мүмкін (көп фазалы қызмет көрсету жүйесі). Төртіншіден, әр арна сұраныстарға бірдей уақыт аралығында қызмет көрсете алады немесе сұраныстарға қызмет көрсету уақыты тиісті бөлу заңымен кездейсоқ шама болып табылады.

Өтінімдер ағыны, әдетте, дәйекті түрде келіп түсетін екі өтінім арасындағы аралықтардың ұзақтығын анықтайтын ЖҚКЖ-не түсудің ықтималды заңымен сипатталады. Бұл ұзақтықтар көбінесе статистикалық тәуелсіз және олардың таралуы біршама ұзақ уақытқа өзгермейді.

Егер арна бұрын келіп түскен талапқа қызмет көрсетумен айналысса, кезекті өтінім жүйеге келіп түскен сәтте кезек туындайды.

Мұндай жағдайларға реакция сипаты бойынша қызмет көрсету жүйелері екі топқа бөлінеді: Қызмет көрсетуден бас тарту жүйелері және күту немесе кезек жүйесі. Ақаулық жүйесінің классикалық мысалы, мысалы, телефонның автоматты жүйесі.

Күту жүйелерінде барлық арналар бос емес кезде келген өтініш жүйеден шықпайды, бірақ кезекке тұрады және тиісті қызмет көрсету арнасының босатылуын күтеді.

15.2 Буферлеу және диспетчерлеу пәндері

Қызмет көрсету үшін кезекке қою ережелері *Буферлеу* пәндері деп аталады. Бұл жалпы жағдайда кезек шектеусіз болуы мүмкін емес. Нақты жүйелерде кезектер көбінесе соңғы ұзындыққа ие болады, яғни кезекке тек белгілі бір өтінімдер берілуі мүмкін. Мұндай жағдайларда буферлеу тәртібімен кезекті толтырған кезде жаңадан келген өтінім не жоғалатыны, яғни жүйеден қызмет көрсетусіз кететіні, не кезектен қандай да бір өтінімді алмастыратыны көзделуі тиіс. Соңғы жағдайда алмастырылатын өтінімді таңдау қандай да бір критерий (басымдық) бойынша жүргізілуі мүмкін.

Мысалы, алынып тасталған өтінімді таңдау кезек күту уақытының өлшемі бойынша жүзеге асырылуы мүмкін: ең "ескі" немесе ең "жаңа" өтінім алынып тасталады.

Қызмет көрсету кезегінен өтінімдерді таңдау ережелері *диспетчерлеу* пәндері деп аталады. Диспетчерлеу пәндері басымдықсыз және басым болып бөлінеді. Басымдықсыз пәндерге мыналар жатады:

- * өтінімдерді қабылдау тәртібінде қызмет көрсету: "бірінші келді - бірінші қызмет көрсетілді";

- * өтінімдерге кері тәртіпте қызмет көрсету: "соңғы келді - бірінші болып қызмет көрсетілді";

- * кезектен тыс кездейсоқ таңдау арқылы қызмет көрсету.

Диспетчерлеу пәндерінің екінші және үшінші нұсқалары, әдетте, "адамсыз" (немесе олар "қорғансыз" деп те аталады) жүйелерде, негізінен техникалық сипатта қолданылады.

Диспетчерлеудің басым пәндері үшін, әрине, қызмет көрсету басымдығы берілуі керек, мысалы, компьютерде іске асырылатын бағдарлама неғұрлым қысқа болса, оның басымдығы соғұрлым жоғары болады.

Модельдеуді дамыту және компьютерлердің мүмкіндіктерін арттыру шешім қабылдауды қолдау жүйелерінің пайда болуына әкелді. Шешімдерді қолдау жүйелері ұйымдастырушылық жүйелерде басқару шешімдерінің баламаларын қалыптастырудың, әр баламаны іске асырудың салдарын анықтаудың және ең қолайлы шешімді таңдауды негіздеудің жалпы әдіснамасымен біріктірілген математикалық модельдер мен әдістер жиынтығын ұсынады.

Шешімді қолдаудың әр жүйесі тек жеке сипатта болады, өйткені ол шешілетін басқарушылық мәселенің нақты мазмұнымен және белгілі бір ұйымдағы шешім қабылдау рәсімінің ерекшеліктерімен анықталады. Егер шешім қабылдау процедуралары тұрақты, тұрақты болса, онда қарастырылып отырған жүйенің құрамы мен дәйектілігі диалогтық процедураларды аз қолданумен негізінен формальды модельдер мен әдістерді қолданатын нормативтік әдістер ретінде бекітілген. Мысалы,

өндірістік қызметті мерзімді жоспарлау. Шешімдерді қолдау жүйелері мезгіл-мезгіл туындайтын проблемалық жағдайларды жоғары белгісіздікпен шешуде тиімді және, әдетте, бұрын толық аналогтары жоқ. Шешімдерді қабылдауды қолдау жүйелері әр мәселе үшін жеке жасалады. Оларға негізінен логикалық-эвристикалық және сараптамалық әдістер мен модельдер кіреді, диалогтық процедуралар басты рөл атқара бастайды. Мұндай жағдайларда белгісіздік жағдайында қабылданған салдарларды бағалау үшін имитациялық модельдер қолданылады.

15.3 Модельдеу ерекшеліктері

Имитациялық модельдің алғашқы белгісі - схемаға назар аудару. Имитациялық модельмен тәжірибе жасау кезінде сарапшылар оған сұрақтар қояды, модель жауаптар береді, сарапшылар оларды талдайды және білім, пайымдау, шешім қалыптастырады.

Имитациялық модельдің екінші ерекшелігі-классикалық модельдерге қарағанда егжей-тегжейлі, прототиптің құрылымын қазіргі заманғы ұйымдастыру және өңдеу құралдарының бай және икемді мүмкіндіктерін қолдана отырып, модель құрылымына көрсету. Бұл қазіргі имитациялық модельдер мен сипаттамалық эконометрикалық модельдер арасындағы айырмашылық, дегенмен соңғысын имитациялық модельдің ерекше жағдайы ретінде қарастыруға болады. Эконометриялық модель "қара жәшік" ретінде орналастырылған және прототипте ішкі байланыстарды көрсетпейді. Оның параметрлері шындықты бақылауды статистикалық өңдеу нәтижесінде бағаланады. Бұл бағалау қазіргі экономикалық механизм жағдайында ғана дұрыс болып көрінуі мүмкін. Модель жобаланған экономикалық механизм үшін жарамсыз болып қалады, ол қолданыстағы механизмнен аз немесе аз ерекшеленеді. Бұрынғыдан түбегейлі ерекшеленетін экономикалық механизмдердің қасиеттерін зерттеу әсіресе өзекті. Егер модель дизайнері осы себепті "маңдайда" модельдеуден бас тартуға мәжбүр болса, ол ішкі себеп-салдарлық байланыстар мен механизмдерді түсінуге және көрсетуге тырысады. Ол үшін модель компоненттер жиынтығы түрінде ұсынылады. Әр компонент үшін дизайнер Барлық маңызды қатынастарды көрсету қажет болатын сенімді модель құра алуы керек. Бұл әдіс сенімді модельге әкеледі-әсіресе егер прототиптік жүйенің құрамдас бөліктерінің модельдерін модель компоненттері ретінде тандаса: кәсіпорындар, шеберханалар, банктер, аймақтар, көлік желілері, басқару элементтері, халық топтары. Модельдеу моделінің құрылымының күрделенуі оны сарапшы немесе нормативтік (яғни қарапайым) модель жасаған шешімдердің сапасы құралы ретінде пайдалану ниетінен туындайды. Бастапқы құрылымдық бірліктерді модельдеу үшін кейде классикалық тәсілдерді тартуға болады. Сонымен, технологиялық процестерді көрсету

үшін өндірісті басқару механизміне тәуелді емес эконометрикалық өнеркәсіптік және ауылшаруашылық өндірістік функцияларды қолдану орынды. Сұраныс функцияларын құру үшін онтайландыру модельдерін қолдануға болады, өйткені мұнда оптималдылық пен шектеулер критерийі кейде негізделген түрде тұжырымдалуы мүмкін.

Имитациялық модельдің үшінші ерекшелігі-модель, әдетте, салааралық тепе-теңдіктің статикалық моделі ретінде "сурет" емес. Бұл статикалық модельдің салааралық баланстың разновременные события "склеены" в түріндегі бірінші. Модельдеу моделін прототиптің жұмысын дәйекті сәттерде модель күйлерінің өзгеруі түрінде көрсететін және осыған байланысты уақытты модельдеудің әртүрлі әдістерінің пайда болатын "фильм" ретінде қарастыруға болады. Бұл мүмкіндік жоғарыда аталған қажеттіліктен туындайды (нормативтік модельдің рөлі осымен аяқталады), сонымен қатар модельге жүйенің қабылданған шешімдерге реакциясын көрсететін компоненттерді қосу - оның жұмыс істеу көрсеткіштері түрінде. Классикалық динамикалық баланстық модель және оның сорттары модельдеу моделінің жеке, "бұзылған" жағдайы ретінде қарастырылуы мүмкін. Бұл модельде жұмыс істеу модельденгенімен, ресурстарды өндіру, бөлу және тұтыну сәттері бір-біріне азаяды. Нәтижесінде, модель жеткізушілер мен тұтынушылар өндірістерінің әртүрлі ырғақтарымен байланысты маңызды құбылыстарды, Жеткізу шарттарының бұзылуының салдарын және т.б. тым қатаң сипаттайды.

Имитациялық модельдің төртінші ерекшелігі-процестерді модельдеуге арналған құралдарды еркін таңдау. Классикалық модельдер математикалық құрылымдардың салыстырмалы түрде тар шеңберін қолданады: сызықтық теңдеулер мен теңсіздіктер, сызықтық және бөлшек-сызықтық функцияларды онтайландыру, регрессиялық жаппай қызмет көрсету теориясын талдау, әдістері. Процесс модельдері-бұл компьютерлік және адам-компьютерлік алгоритмдер.

Олар:

- * "модельдік" уақыттың мәндерін есептеңіз;
- * модель компоненттерінің күйін білдіретін айнымалы мәндерді өзгертіңіз;
- * модельдеу барысында жаңа компоненттерді генерациялайды (мысалы, салынып жатқан өнеркәсіптік кәсіпорындар (тұрғын кварталдар) пайдалануға берілетін немесе төлем талаптары қойылатын);
- * компоненттерді жойыңыз (бұзылған кәсіпорындар, тозған тұрғын үйлер, төленген төлемдер).

Процестерді модельдеу алгоритмдеріне кейбір айнымалылардың кездейсоқ мәндерін тудыратын процедуралар кіреді (мысалы, қазіргі ауа-райы жағдайларын немесе жеткізілім көлемінің келісім-шарттан ауытқуын білдіреді).

Бесінші ерекшелігі-экспериментатордың модельмен диалогының кең мүмкіндіктері, ал компьютерде орындалатын классикалық модельмен экспериментатор оны іске қоспас бұрын (оның өзгертін параметрлерінің мәндерін белгілеу) және оны аяқтағаннан кейін (нәтижелерді түсіндіру) байланысады.

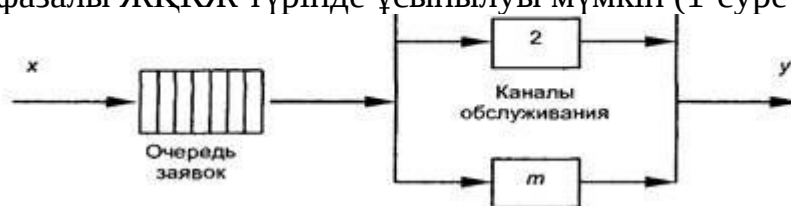
Бұл ерекшеліктер әр түрлі авторлар еліктеуге бейім модельдердің барлық қасиеттерін сарқылмайды. Екінші жағынан, кейбір авторлар осы қасиеттердің тек бір бөлігі бар Имитациялық модельдерді атайды. Сонымен, осы қасиеттердің кейбіреулері белгілі бір дәрежеде классикалық модельдерге, әсіресе олардың модификацияларына ие болуы мүмкін.

Ақпараттық және есептеу қызметтерінің нақты жүйелерін ұсыну мүмкіндігін көрсететін бірнеше мысалдар келтірілген

ЖҚКЖ түрінде.

Мысал 15.1.

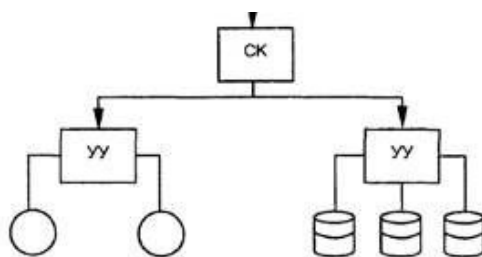
Егер есептеу орталығында бірнеше есептеу жүйелері болса, олардың әрқайсысы кез-келген өтінімге қызмет ете алады, мысалы, пайдаланушының оның тапсырмасы бойынша нәтижелерді шығару үшін пайдаланылатынына немқұрайлы қарауы бар бірнеше басып шығару құрылғылары немесе деректерді дайындаудың көп пультті құралы болса, онда осы жүйелердің әрқайсысы өтінімдердің жалпы ағынымен көп арналы бір фазалы ЖҚКЖ түрінде ұсынылуы мүмкін (1-сурет).



Сурет 15.1 Бір фазалы көп арналы ЖҚКЖ

Мысал 15.2

Біршама күрделі ЖҚКЖ мысалын қарастырайық. 2-суретте көрсетілген құрылғылардан тұратын есептеу жүйесінің бөлігі талданады делік.



Сурет 15.2 Есептеу жүйесінің фрагменті

Мұнда оперативті жады бар процессорға селекторлық арна (СК) және басқару құрылғылары (УУ) арқылы екі магниттік таспа дискісі және

үш магниттік диск жетегі қосылған.

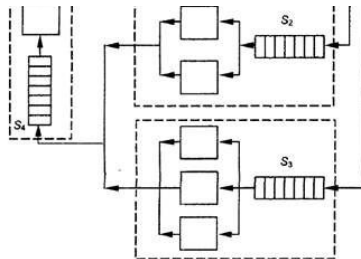
Сыртқы жад құрылғыларында деректер жиынтығы - файлдар орналасқан.

Пайдаланушылардан мәселелерді шешуге арналған сұраулар ағыны өтінімдердің шексіз көзі болып табылады.

Бір мәселені шешу процесі санау кезеңдерінің кездейсоқ реттілігін (процессорда деректерді өңдеу) және файлдарға қоңырау шалуды (жүйенің сыртқы және жедел жады арасында мәліметтер алмасу) орындау болып табылады. Мәселені шешу санау кезеңінен басталады және аяқталады.

Өтінімдер жүйенің әртүрлі құрылғыларымен қызмет көрсету уақытын бірдей бөлу және басымдықтардың болмауы мағынасында біртекті болып саналады. Өтінімдерге олардың келіп түсу ретімен кез келген еркін құрылғы қызмет көрсетеді. Жекелеген құрылғылардың өтінімдерге қызмет көрсету уақыты берілген бөлу заңдары бойынша анықталады.

Бұл жағдайда қарастырылған модель келесідей ұсынылуы мүмкін (15.3-сурет).



15.3 сурет. Ақпараттық-есептеуіш қызмет көрсету жүйесінің моделі

Модель екі бір арналы ЖҚКЖ-ден (S_1 - процессор, S_2 - селекторлық арна) және екі көп арналы ЖҚКЖ-ден (S_3 - магниттік таспалардағы сыртқы жад, S_4 - магниттік дискілердегі сыртқы жад) тұрады.

Бір типті құрылғылар тобында өтінімдердің жалпы кезегінің болуы болжанады, бұл топтық басқару құрылғыларының болуын көрсетеді.

Жеке терминалдардан интерактивті режимде жұмыс істейтін бірнеше пайдаланушыларға қызмет көрсететін есептеу жүйесінің өзі қызмет көрсету жүйесінің мысалы бола алады. Ақпараттық-есептеуіш қызмет көрсету жүйелерін жаппай қызмет көрсету жүйелерімен ұсыну оларды тиімді Имитациялық модельдеу үшін әдіснамалық негіз болып табылады.

Бірінші мысалда қарастырылған қызмет көрсету жүйесі үшін модельдеу моделін құру арқылы осы мәлімдемені растаймыз.

Осындай ЖҚКЖ-мен ұсынылуы мүмкін Ақпараттық-есептеу қызметінің нақты жүйесі ретінде есептеу орталығында орнатылған компьютерлер тобының жөндеу жүйесін аламыз.

Практикалық жұмыс 1. MathCad бағдарламасындағы қарапайым

есептеулер мен операциялар

MathCad ортасында қарапайым есептеулерді және операцияларды орындау дағдыларын, сонымен қатар функциялармен жұмыс істеу әдістемесін меңгеру.

Басты терезе әрқашан экранда бар және бағдарламаны жасау процесін басқаруға арналған. Пиктограммалар негізгі мәзірдің жиі қолданылатын командаларына қатынауды жеңілдетеді.

MathCad құжаттар құрылымы

MathCad көмегімен жасалған құжат бағдарлама болып табылады, яғни қандай да бір математикалық есепті іске асыратын есептік формулалардың реттілігі. Қарапайым MathCad-тағы құжатты қарастырайық: есептің мәнін шығару

$a := 10$ "a" айнымалысына меншіктеу

$b := 20$ "b" айнымалысына меншіктеу

$\frac{(a+b)}{2 \cdot a \cdot b} = 0.75$ есептің шешімін шығару

$c := \frac{(a+b)}{2 \cdot a \cdot b}$ "c" айнымалысына формуланы меншіктеу

$c = 0.75$ "c" айнымалысының шешімін шығару

есептік құжаттың негізі-ауыспалы, математикалық. өрнектер, функциялар, мәндерді беру және шығару операторлары, сондай-ақ мәтіндік түсініктемелер.

Айнымалы. MathCad ортасында айнымалы ретінде латын алфавиті символдарының ерікті санынан және астын сызу белгісінен тұратын кез келген идентификаторлар жіберіледі. Бос орындар мен өзге де символдарға (оның ішінде орыс әліпбиінің әріптері) жол берілмейді.

MathCad ортасы әртүрлі түрдегі айнымалыларды қолдайды: бүтін, заттық, кешенді, векторлық, матрицалық, мәтіндік. Айнымалы түрін анықтау қандай да бір мәнді беру кезінде автоматты түрде жүреді. Одан әрі айнымалы түрі қайта тағайындау операторымен анықталуы мүмкін.

$a := 23$ «a» бүтінсанды айнымалысы

$b := 10.7$ «b» нақты айнымалысы

$c := 12 + 7i$ «c» комплексті айнымалысы

$b := \text{"end"}$ «b» айнымалысы мәтіндік

Математикалық өрнектер. Саннан, айнымалыдан, функциялардан, математикалық әрекеттерден (қосу, азайту, бөлу, көбейту), математикалық символдардан (түбір, модуль, интеграл және т.б.) тұрады. Математикалық әрекеттер мен таңбаларды енгізу үшін 1-кестеде көрсетілген пернетақтылық қысқартуларды қолдану қажет.

1-кесте. Негізгі пернетақталық қысқартулар

Атауы	Белгіленуі	Енгізу тәсілі
Қосу	+	+
Азайту	-	-
Бөлу	—	/
Көбейту	•	*
Түбір	$\sqrt{\quad}$	\
Модуль	$ \quad $	
Дәреже	x^N	^
Меншіктеу операторы	: =	:
Мәндерін шығару операторы	=	=

Функциялар Пайдаланушының кірістірілген математикалық функциялары мен функцияларына бөлінеді. Кіріктірілген функцияларға синус, логарифм және т. б. жатады.

$a := \sin(2.73)$ а айнымалысы енгізілген функцияны шақыру нәтижесін береді.

Пайдаланушы функциялары-кірістірілген математикалық функцияларды қолданумен құжат мәтінінде анықталатын функциялар.

$s(t) := 12 \cdot t + (2 \cdot t - 1)$ қолданушы функциясын анықтау

$b := s(124)$ b айнымалысына қолданушылық функцияның шақыру нәтижесі меншіктеледі

Бұл функция құжатта анықталған соң, ол кірістірілген функциядан еш айырмашылығы жоқ, яғни оны барлық өрнектерде, соның ішінде жаңа пайдаланушы функциясын анықтағанда да пайдалануға болады.

Мүмкіндіктер бір немесе бірнеше параметрлерге ие болуы мүмкін, бірақ тек бір мәнді қайтарады. Бірнеше параметрі бар функцияны шақырғанда, параметрлер үтір арқылы көрсетіледі:

$M := \text{Find}(x, y, z)$

Мәтін түсініктемелері. Түсіндірмелерді немесе мәтіндік блоктарды енгізу үшін " таңбасын енгізу керек.

Кірістірілген математикалық функциялар. Кірістірілген функцияны шақырған кезде функцияның атауы және дөңгелек жақшаларда тиісті түрдегі нақты параметрлердің тізімі көрсетіледі. Бұл ретте нақты параметрлер ретінде тұрақтылар, бұрын анықталған айнымалылардың аттары, сондай-ақ тиісті түрдегі өрнектер көрсетілуі мүмкін (2-кесте).

2 кесте. Кейбір кіріктірілген математикалық функциялар

Функция аты	Қызметі
$\sin(z), \cos(z), \tan(z)$	Бұрыштың синусы, косинусы, тангенсі
$\text{asin}(z), \text{acos}(z), \text{atan}(z)$	Арксинус, арккосинус, арктангенс
$\text{mod}(x, y)$	Остаток от деления x -ті y -ке бөлгендегі қалдық
$\exp(z)$	e нің z дәрежесі
$\log(z)$	Негізі 10 болатын z логарифмі
$\ln(z)$	Негізі e болатын z логарифмі (z натурал логарифмі)
$\Phi(x)$	Хэвисайд функциясы. Егер $x < 0$, 0 ді қайтарады, әйтпесе 1

Ескертпе: тригонометриялық функциялар радиандарда көрсетілген бұрыштармен жұмыс істейді.

Мысалы:

$\sin(3.14)=0$
 $A:=\cos(6.28)$ $A=1$
 $B:=$ $B=2$
 $C:=5*\cos(3.14)+\text{mod}(5,2)$ $C=6$
 $\Phi(-25)=0$
 $\Phi(5)=1$

Пайдаланушы анықтайтын функциялар. MathCad-да өз функциясын анықтау мүмкіндігі бар. Функция функцияның көрсетілген аргументтерін есептеу үшін кейбір ереже болып табылады.

Жаңа функцияны жариялау үшін функцияның атауын (ереже айнымалылардың аттары үшін бірдей) енгізу керек, содан кейін дөңгелек жақшаларда формальды параметрлердің тізімін (айнымалылардың аттары) үтір арқылы енгізу керек, содан кейін тағайындау операторын қою керек және қажетті өрнек көрсету керек. Өрнек формальды параметрлер тізімінен айнымалыларды, константаларды, кірістірілген математикалық функциялардың шақыруларын, математикалық әрекеттер мен таңбаларды, сондай-ақ бұрын анықталған айнымалылардың аттарын қамтуы мүмкін.

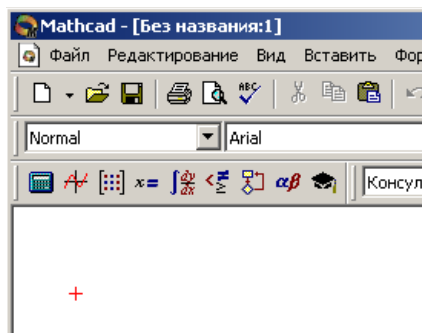
3 кесте. MathCad функцияларды енгізу мысалдары

Функциялардың сипатталуы	MathCad – қа енгізу
Градусты радианға аудару функциясы	$\text{Rad}(x) := \frac{x \cdot \pi}{180}$
Радианды градусқа аудару функциясы:	$\text{Grad}(x) := \frac{x \cdot 180}{\pi}$
Құрама функцияны анықтау $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 \cdot x + 4, & \text{при } 0 < x < 25 \\ 4 \cdot x^3 + 17 \cdot (x - 5)^2, & \text{при } x \geq 25 \end{cases}$	$f(x) := (x^2 + 2 \cdot x + 4) \cdot \Phi(25 - x) + (4 \cdot x^3 + 17 \cdot (x - 5)^2) \cdot \Phi(x - 25)$

Мысал 1. Арифметикалық өрнектің мәнін есептеңіз: $26 + \frac{13}{5}$

және $22 + \frac{14}{6}$

1. Жұмыс құжаты аймағындағы кез келген орын бойынша тінтуірдің сол жағымен нұқыңыз – өрісте енгізу басталатын позицияны білдіретін крест пайда болады (1-сурет).



Сурет 1. MathCad математикалық процессорының терезесі

2. Пернетақтадан символдарды төмендегідей реттілікпен енгізіңіз:

$$26 + \frac{13}{5}$$

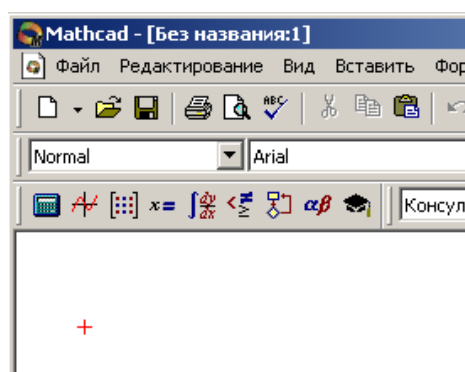
3. Пернетақтадан теңдік белгісін "=" пернесін басу арқылы енгізіңіз. MathCad өрнектің мәнін есептейді және теңдік белгісінің оң жағында нәтижені шығарады.

4. 5 санының төменгі жағындағы тінтуірмен басып, "Backspace" пернесін басыңыз (пернетақтаның екінші қатарының оң жағындағы).

Енді өрнек мәні анықталмады, себебі жүйеге өрнек бөлу керек екені белгісіз. Енгізу орны қара белгімен белгіленген және бұрыштық жақтаумен шектелген.

5. Пернетақтадан 6 санын енгізіп, таңдалған жақтаудан тыс тінтуірді нұқыңыз.

6. 13 санның орнына 14 енгізіңіз, ал 26 санның орнына 22 енгізіңіз



7. Енді көріністі экраннан жойыңыз. Көріністегі кез келген жерге тінтуірдің сол жақ батырмасын басыңыз.

8. Барлық өрнек бұрыштық көк шеңбермен белгіленгенге дейін "Space" пернесін басыңыз.

9. "Backspace" пернесін (енгізу өрісі қара түске боялады) басып, "Delete" пернесін басып, таңдалған жерлерді жойыңыз. Өрнек экраннан жоғалады.

Мысал 2. Өзгермелі өрнектің мәндерін есептеңіз:

$$g \frac{t^2}{2} \quad t = 10, g = 9,8 \text{ болғанда.}$$

1. Жұмыс құжатындағы бос орын тінтуірін басып, пернетақтадан g: таңбаларын енгізіңіз. Пернетақтадан ":" таңбаны енгізгенде, жұмыс құжатында тағайындау белгісі көрсетіледі : =.

2. Пернетақтадан 9 таңбасын енгізіңіз. 8 және енгізу жолағынан тыс бос орынды басыңыз.

3. Жұмыс құжаттарындағы бос орын тінтуірін басып, t:10 пернетақтасынан енгізіп, Енгізу жолынан тыс бос орынды басыңыз.

4. Жұмыс құжатындағы бос орын тінтуірін басыңыз, міндетті түрде айнымалылар анықталған жолдардан төмен және $G * t^2$ "Space" / 2 "Space" "Space" = пернетақтасынан енгізіп, Енгізу өрісінен тыс бос орынды басыңыз.

Егер өрнек енгізген кезде қате болса, бұрыштық жақтаумен қате таңбаны таңдап алыңыз (таңбаның жанындағы төменгі оң жақ тінтуірмен нұқыңыз), таңдалған таңбаны жойыңыз ("Backspace" пернесін басыңыз) және белгіленген орында түзетуді енгізіңіз.

MathCad енгізілген өрнектерді оқып, солдан оңға және жоғарыдан төмен қарай орындайды, сондықтан есептеу өрнегі солға немесе оған белгіленген айнымалы мәндерден төмен орналасуын қадағалаңыз.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

Төменде келтірілген өрнектердің 5 мәнін (сіздің нұсқаңызға сәйкес) есептеу ұсынылатын жеке тапсырманы орындаңыз (4-кестені қараңыз). Практикалық жұмыс бойынша есеп дайындаңыз. Ол MathCad-құжаттың нәтижесінде алынған мәтінін қамтуы тиіс.

4 кесте. Тапсырмалар нұсқалары

Нұсқа №	Өрнектер номерлері	Нұсқа №	Өрнектер номерлері
1	17, 18, 19, 21, 22	13	1, 9, 13, 21, 25
2	3, 5, 10, 11, 25	14	5, 15, 19, 23, 24
3	2, 4, 17, 22, 25	15	2, 8, 11, 17, 22
4	5, 6, 7, 12, 20	16	6, 8, 12, 14, 25
5	2, 8, 10, 19, 23	17	2, 4, 6, 8, 25
6	12, 14, 17, 23, 25	18	1, 7, 12, 17, 24
7	3, 6, 12, 19, 23	19	1, 7, 10, 13, 15
8	1, 3, 5, 11, 18	20	3, 5, 14, 18, 24
9	7, 16, 18, 22, 24	21	5, 6, 7, 13, 25
10	2, 10, 12, 16, 20	22	2, 3, 5, 9, 18
11	8, 9, 13, 16, 20	23	6, 8, 13, 17, 20
12	4, 11, 17, 19, 24	24	1, 4, 13, 20, 22

Тапсырма үшін өрнектер:

1.
$$\frac{2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{0.5 + \sin^2 y} \left(1 + \frac{z^2}{3 - z^2/5}\right).$$
2.
$$\frac{\sqrt[3]{8 + |x - y|^2 + 1}}{x^2 + y^2 + 2} - e^{|x - y|} (tg^2 z + 1)^x.$$
3.
$$\frac{1 + \sin^2(x + y)}{\left|x - \frac{2y}{1 + x^2 y^2}\right|} x^{|y|} + \cos^2\left(\arctg \frac{1}{z}\right).$$
4.
$$|\cos x - \cos y|^{(1 + 2 \sin^2 y)} \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4}\right).$$
5.
$$\ln\left(y^{-\sqrt{|x|}}\right) \left(x - \frac{y}{2}\right) + \sin^2 \arctg(z).$$
6.
$$\sqrt{10(\sqrt[3]{x} + x^{y+2})} (\arcsin^2 z - |x - y|).$$
7.
$$5 \arctg(x) - \frac{1}{4} \arccos(x) \frac{x + 3|x - y| + x^2}{|x - y|z + x^2}.$$
8.
$$\frac{e^{|x - y|} |x - y|^{x+y}}{\arctg(x) + \arctg(z)} + \sqrt[3]{x^6 + \ln^2 y}.$$
9.
$$\left|x^{\frac{y}{x}} - \sqrt[3]{\frac{y}{x}}\right| + (y - x) \frac{\cos y - \frac{z}{(y - x)}}{1 + (y - x)^2}.$$
10.
$$2^{-x} \sqrt{x + 4\sqrt{|y|}} \sqrt[3]{e^{x-1/\sin z}}.$$
11.
$$y^{\sqrt[3]{|x|}} + \cos^3(y) \frac{|x - y| \left(1 + \frac{\sin^2 z}{\sqrt{x + y}}\right)}{e^{|x - y|} + \frac{x}{2}}.$$
- 12.

$$\begin{aligned} &2 \\ &x=14.26, \\ &y=-1.22, \\ &z=3.5 \times 10^{-2} \\ &x=-4.5, \\ &y=0.75 \times 10^{-4}, \\ &z=0.845 \times 10^2 \\ &x=3.74 \times 10^{-2}, \\ &y=-0.825, \\ &z=0.16 \times 10^2 \\ &x=0.4 \times 10^4, \\ &y=-0.875, \\ &z=-0.475 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x=-15.246, \\ &y=4.642 \times 10^{-2}, \\ &z=20.001 \times 10^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2 \\ &x=16.55 \times 10^{-3}, \\ &y=-2.75, \\ &z=0.15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x=0.1722, \\ &y=6.33, \\ &z=3.25 \times 10^{-4} \\ &x=-2.235 \times 10^{-2}, \\ &y=2.23, \\ &z=15.221 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x=1.825 \times 10^2, \\ &y=18.225, \\ &z=-3.298 \times 10^{-2} \\ &x=3.981 \times 10^{-2}, \\ &y=-1.625 \times 10^3, \\ &z=0.512 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x=6.251, \\ &y=0.827, \\ &z=25.001 \end{aligned}$$

13. $2^{(y^x)} + (3^x)^y - \frac{y \left(\arctg z - \frac{\pi}{6} \right)}{|x| + \frac{1}{y^2 + 1}}.$
 $x=3.251,$
 $y=0.325,$
 $z = 0.466 \times 10^{-4}$
14. $\frac{\sqrt[4]{y + \sqrt[3]{x - 1}}}{|x - y|(\sin^2 z + tgz)}$
 $x=17.421,$
 $y = 10.365 \times 10^{-3},$
 $z = 0.828 \times 10^5$
15. $\frac{y^{x+1}}{\sqrt[3]{|y - 2| + 3}} + \frac{x + \frac{y}{2}}{2|x + y|} (x + 1)^{1/\sin z}$
 $x=12.3 \times 10^{-1},$
 $y=15.4,$
 $z=0.252 \times 10^3$
16. $\frac{x^{y+1} + e^{y-1}}{1 + x|y - tgz|} (1 + |y - x|) + \frac{|y - x|^2}{2} - \frac{|y - x|^3}{3}$
 $x=2.444,$
 $y=0.869 \times 10^{-2},$
 $z=-0.13 \times 10^3$
17. $\frac{2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)}{2.5 + \cos^2 y} \left(2 + \frac{z^3}{3 - z^2/4} \right).$
 $x=1.26,$
 $y=-1.32,$
 $z=3.5$
18. $\frac{\sqrt{8 + |x + y|^2 - 1}}{x^2 - y^2 + 2} - e^{|x - y|} (tg^2 z - 1)^x.$
 $x=3.74 \times 10^{-2},$
 $y=-0.825,$
 $z=0.16 \times 10^2$
19. $\frac{\sqrt[4]{y + x}}{|x - y|(\sin^2 x + tgy + 3)}$
 $x=17.421,$
 $y=10.365 \times 10^{-3},$
 $z=0.828 \times 10^5$
20. $3^{-x} \sqrt{y + \sqrt[4]{|y|}^3} \sqrt[3]{e^{x-1/\cos z}}.$
 $x=3.981 \times 10^{-2},$
 $y=-1.625 \times 10^3,$
 $z=0.512$
21. $\left| \frac{y}{x^x} - \sqrt[3]{\frac{y}{x}} \right| + \frac{\cos x - \frac{z + 1}{(y - x)}}{1 + (y - x)^2}.$
 $x=1.825,$
 $y=18.225,$
 $z=-4.298$
22. $|\cos x - \cos y|^{(1 + \sin^2 y)} \left(1 + z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \right).$
 $x=0.4,$
 $y=-0.875,$
 $z=-0.475$
23. $\sqrt{12(\sqrt[3]{x + x^{y+2}} + 1)} (\arcsin^2 z + |x - y|)$
 $x=16.55 \times 10^{-3},$
 $y=-3.75,$
 $z=0.15$
24. $\frac{x^{y+3} + e^{y-2}}{2 + x|y - tgz|} + \frac{|y - x|^2}{2} - \frac{|y - x|^3}{3}$
 $x=0.444,$
 $y=0.869 \times 10^{-2},$
 $z=-0.13 \times 10^3$
25. $\frac{\sqrt[3]{5 + |2x - y|^2 + 3}}{x^2 + y^2 + 3} - e^{|x - y|} (tg^2 z + 2)^x.$
 $x=1.4,$
 $y=-1.875,$
 $z=-1.475$

26.

$$\frac{1 + \sin^2(x + y)}{|x|} x^{|y|} + \cos^2\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{z}\right).$$

$$\begin{aligned}x &= 2.74 \times 10^{-2}, \\ y &= -0.825, \\ z &= 0.16 \times 10^2\end{aligned}$$

Практикалық жұмыс 2. MathCad бағдарламасындағы қарапайым операциялар

Бірнеше рет есептеулер. MathCad-да мәндердің кейбір диапазонын біртіндеп өтетін айнымалы индекстер жасау мүмкіндігі бар. Бұл Аргументтің өзгермелі мәні кезінде бір немесе өрнектер тобының бірнеше рет есептеулерін орындауға мүмкіндік береді (мысалы, x 0-ден 20-ға дейінгі мәндер үшін 1 қадаммен өрнектерді есептеу).

Айнымалы-индексті анықтау кезінде бірінші мәнді, үтірлі, екінші мәнді, жиын белгісін (;), соңғы мәнді көрсету қажет. Одан кейін, өзгермелі-индексті қамтитын барлық өрнектер оның көрсетілген барлық мәндері үшін есептеледі.

Мысал 1. x үшін 1 ден 5-ке дейін қадамы 1 болатын $x^2 - e^x$ өрнегінің мәнін есептеңіз.

$x := 1, 2..5$

$$f_x := x^2 + \exp(x)$$

$f_x =$

3.718
11.389
29.086
70.598
173.413

Ескерту: F айнымалы сандық индексті пайдаланады (мәтіндікпен шатастырмаңыз!). Сандық индексті енгізу үшін таңба қолданылады

$$\frac{2x + 1}{x^2 + 2}$$

Мысал 2. $f(x)$ = функциясының мәнін $x = 1.4$ болғанда есептеп және $x \in [0, 20]$ үшін 1 қадаммен функция мәндерінің кестесін құрыңыз

1.Жұмыс құжатындағы бос орынды нұқып, $F(x) = 2x + 1$ "Space" / x^2 "Space" + 2 пернетақтасынан енгізіп, Енгізу өрісінен тыс жұмыс құжаты бойынша нұқыңыз.

2.Жұмыс құжатындағы бос орынды нұқып, $f(1.4)$ =пернетақтасынан енгізіңіз. Теңдік белгісін енгізгеннен кейін дереу $x = 1.4$ кезінде $f(x)$ функциясының есептелген мәні шығарылады.

3.X аргументінің дискретті мәндерін $[0, 20]$ интервалында 1-қадаммен белгілеу: жұмыс құжатындағы бос орынға басу арқылы $x : 0, 1 ;$

20 пернетақтасынан енгізіп , Енгізу өрісінен тыс нұқыңыз.

4.Жұмыс құжатындағы бос орынға басу арқылы $f(x)$ = пернетақтасынан енгізіңіз.

5.Нәтижесінде функция атымен функция мәндерінің кестесі пайда болады.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

Функцияны анықтап және $x=2,8$ болғандағы мәнін есептеңіз. Қадамы 1-мен $x \in [3;13]$ мәндер кестесін тұрғызыңыз.

Нұсқа №	Өрнектер номері	Нұсқа №	Өрнектер номері
1	1, 2, 13, 15, 18	13	4, 16, 17, 20, 24
2	3, 5, 7, 20, 24	14	2, 3, 6, 8, 11
3	7, 8, 18, 19, 23	15	3, 4, 11, 21, 24
4	10, 11, 18, 19, 23	16	3, 5, 11, 18, 19
5	9, 14, 19, 23, 24	17	8, 11, 13, 19, 22
6	11, 12, 14, 17, 18	18	4, 7, 13, 18, 19
7	1, 9, 10, 16, 22	19	7, 9, 11, 13, 19
8	8, 10, 11, 21, 23	20	11, 12, 14, 18, 22
9	5, 15, 20, 23, 24	21	7, 8, 10, 12, 23
10	14, 15, 16, 17, 25	22	8, 9, 17, 18, 25
11	1, 8, 17, 24, 25	23	9, 11, 12, 21, 22
12	8, 10, 12, 15, 20	24	1, 2, 8, 11, 15

5 кесте. Тапсырмалар нұсқалары

3-тапсырма үшін өрнектер

- | | | |
|-----------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $\frac{2x+1}{(x+1)^2}$ | 2. $\frac{7x}{(x-1)^2}$ | 3. $\frac{x^3-27x+54}{x^2}$ |
| 4. $\frac{5x^3}{(x+1)^2}$ | 5. $\frac{x^3-2x+8}{(x+1)^2}$ | 6. $\frac{3x^2+1}{(9x+1)^2}$ |
| 7. $\frac{2x^4-16x+64}{(x+1)^4}$ | 8. $\frac{x^2e^{-x-3}}{x+1}$ | 9. $\frac{3x^3+24}{(7x+1)^2}$ |
| 10. $\frac{2x^2-16x+64}{(x+1)^2}$ | 11. $\frac{32x^5-512x+8}{(x+2)^6}$ | 12. $\frac{2x^3-128x^2+16x}{(x+4)^2}$ |
| 13. $\frac{3x^3+124}{8x^2}$ | 14. $\frac{x^2-x+4}{(x-1)^2}$ | 15. $\frac{32x^5-512x+8}{(x+2)^6}$ |
| 16. $\frac{x^3-9x+27}{(x-1)^2}$ | 17. $\frac{4x^3-256x^2+2x}{8x^2+1}$ | 18. $\frac{6x^3-9x}{(x-1)^2}$ |
| 19. $\frac{8x^2-8x+4}{(x+1)^2}$ | 20. $\frac{4x^4-4x}{(x^2+1)^2}$ | 21. $\frac{x^5-1024x}{x^3}$ |
| 22. $\frac{x^4-2x^3}{x^4+1}$ | 23. $\frac{66x^2-999x}{(x+1)^2}$ | 24. $\frac{x^3-9x^2+81x}{(x+1)^2}$ |
| 25. $\frac{x^4e^{-x}}{x^2+1}$ | | |

Практикалық жұмыс 3. Mathcad жүйесіндегі жұмыс негіздері

Mathcad әмбебап компьютерлік математика жүйесі ғылыми - техникалық есептеулердің ең жақсы жүйелерінің бірі болып табылады. Mathcad ортасында әртүрлі математикалық есептерді сандық және символдық шешуге арналған жүзден астам операторлар мен функциялар қол жетімді.

Mathcad үш негізгі типтегі блоктардан тұратын құжаттармен жұмыс істейді: математикалық өрнектер, мәтіндік фрагменттер және графикалық аймақтар. Құжаттағы мәтіндік емес (логикалық) блоктардың орналасуы негізгі мәнге ие – солдан оңға және жоғарыдан төменге.

Mathcad жүйесінің кіріс тілі қарапайым математикалық тілге өте жақын және қарапайым жағдайларда бағдарламалауды қажет етпейді.

Математикалық өрнектерді құру үшін айнымалылар, операторлар және функциялар қолданылады. Айнымалылар - бұл белгілі бір типтегі деректерді сақтайтын атаулары бар объектілер. Айнымалы түрі оның мәнімен анықталады. Айнымалы атаулар тек латын әріптерінен түзетілуі керек. Айнымалы атаулармен оларға мән беру ұғымы тығыз байланысты «:=» белгісі - айнымалыға мәнді меншіктеу (жергілікті тағайындау), «≡» белгісі Ғаламдық тағайындау, « = » белгісі - есептеу нәтижесін шығару,"

= " белгісі (**Boolean** панелінен алынған қалың теңдік белгісі) – логикалық теңдік белгісі. Операторлар – тұрақтылар немесе айнымалылар арқылы ұсынылуы мүмкін деректер (операндтар) бойынша белгілі бір операциялардың орындалуын көрсететін арнайы таңбалар. Операторларға мыналар жатады: ариф-метикалық операторлар (+, -, *, /), түбірді есептеу және т.б. Функция - атауы мен параметрлері бар кіріс тілінің объектісі. Функцияға жүгінген кезде нәтиже-мәнді қайтару (есептеу нәтижесі).

Функциялардың сандық мәндерін келесі түрде көрсету үшін кестелер, графиктер, сонымен қатар бірқатар басқа мәселелерді шешу үшін сараланған айнымалылар қолданылады. Оларды жасау үшін келесі өрнектер қолданылады: Name:=N1,(N1+step)..N2, мұндағы Name- айнымалының аты, N1-оның бастапқы мәні, N2-соңғы мәндер, step – айнымалыны өзгерту қадамы, символ".." (қос нүкте) пернетақтадан пернемен теріледі"; " (нүктелі үтір) немесе **Math** тақтасында орналасқан **Calculator** панелінен. Соңғысын **View** мәзіріндегі **Toolbars** тобынан шақыруға болады. Көрсетілген тағайындау нәтижесінде name айнымалысы N1-ден N2-ге дейінгі сандар тізбегі болады, қадам step-қа тең.

Формула редакторын іске қосу үшін тінтуірдің жүгіргісін өңдеу терезесінің кез - келген бос орнына орнатып, сол жақ батырманы басу жеткілікті. Кішкентай қызыл крест түрінде пайда болған көрсеткіш формулалар жиынтығын бастауға болатын орынды көрсетеді.

Жүйеде белгілі бір операторды орнату үшін шаблондар дайындалған. Ол үшін әртүрлі математикалық таңбалардың шаблондар жиынтығы бар панельдер қолданылады (Math тақтасын қараңыз).

Жұмыстың ыңғайлылығы және мәтіндік түсініктеме жасау мүмкіндігі үшін мәтіндік редактор Mathcad жүйесіне енгізілген. Қарапайым жағдайда, мәтінді енгізу үшін пернетақтада "тырнақша" таңбасын теру немесе **Insert** мәзірінде **Text Region** пәрменін пайдалану жеткілікті.

Mathcad жүйесінде жұмыс істеудің қарапайым мысалдарын қарастырыңыз.

Мысал 1. $a=2$ және $b=8$ айнымалы мәндер берілген делік. Айнымалылардың мәнін есептеу қажет.

$$z = \frac{\sqrt{1 - 0.1a(a+b)^3}}{\log_b a} \sin(a), \text{ и } \theta = \operatorname{ctg}\left(\frac{a\pi}{15}\right).$$

Пернетақтадан a, shift+: таңбаларының реттілігін тереміз (мұнда және одан әрі, егер қарама-қарсы көрсетілмесе, " + " белгісі пернелерді бір уақытта басуды білдіреді), 2. Нәтижесінде, Mathcad жүйесінің жұмыс құжатында $a:=2$ өрнегі болады, Бұл "a" айнымалы мәні екіге тең болады дегенді білдіреді. Сол сияқты ауыспалы "b" мәнін 8 - ге тең етіп

тағайындаймыз. Әрі қарай, жоғарыда көрсетілген өрнекті "z" айнымалысына тағайындаймыз. Түбір жиынтығы үшін "\" пернесімен немесе **Calculator** панелімен қосуға болады. Дәреже жиынтығын **Calculator** панелінің көмегімен де жасауға болады "**shift**+**^**" пернелер тіркесімінің көмегі. Экранда өрнек пайда болғаннан кейін

бос орын пернесін кезекпен басу арқылы біз көк курсордың алымда тұруы керек өрнекті бөлектейтініне қол жеткіземіз:

$$z := \sqrt{1 - 0.1 \cdot a} \cdot (a + b)^3$$

Осыдан кейін "/"түймесін басыңыз. $\log_b a$ функциясын енгізу үшін

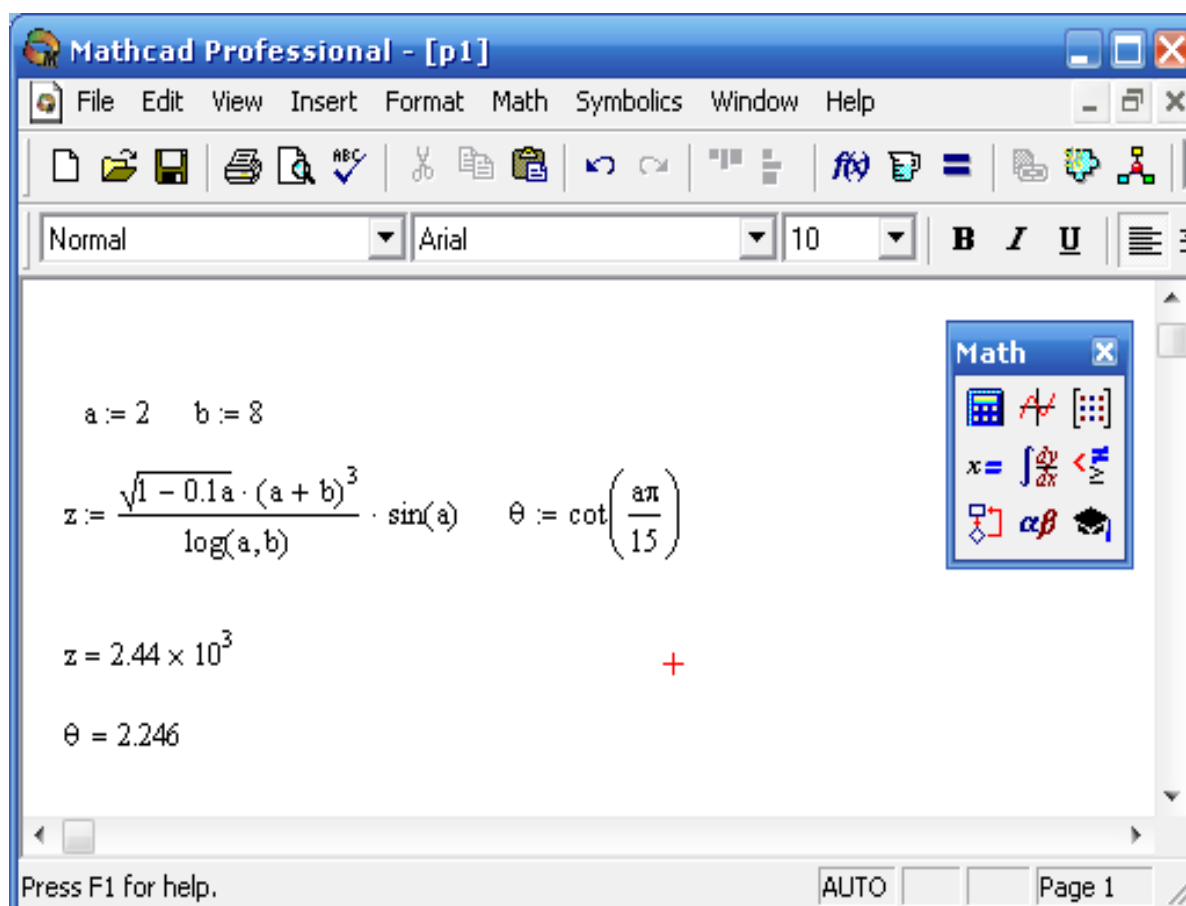
$$z := \sqrt{1 - 0.1 \cdot a} \cdot (a + b)^3$$

функция пәрменімен **Insert** мәзірінен немесе  кескіні бар кнопканы басу арқылы шақырылған функция кірістіру үлгісін пайдалануға болады. Пайда болған диалогтық терезеде функцияның санатын және оның атауын таңдау қажет. Онда сіз оның сипаттамасы мен синтаксисін көре аласыз. Сол сияқты, сіз $\sin$ функциясын тере аласыз немесе **Calculator** тақтасын қолдана аласыз.

Сол сияқты, екінші айнымалы θ әрпі өрнек теріледі, ал айнымалы өзі **Math** панелінің  грек таңбаларынан табылуы мүмкін. Айта кету керек, Mathcad жүйесіндегі кейбір функциялардың атаулары стандартты атаулардан өзгеше. Мысалы, $\text{ctg}(x)$ функциясы $\text{cot}(x)$ ретінде жазылады.

Енді "z" немесе " θ " айнымалысының сандық мәнін алу үшін айнымалының атын енгізіп, "=" пернесін басса жеткілікті. Соңғы жұмыс құжаты 2-суретте көрсетілген.

Қалыпты жағдайда, Mathcad сандық мәндерді үтірден кейінгі үш таңбалармен көрсетеді. Нақты формуладағы үтірден кейінгі бөлшек таңбалардың санын өзгерту үшін (яғни жергілікті) осы формуланы белгілеп алып, **Format** менюінің **Result** ішкі мәзіріне өту керек (немесе тиісті формуланы екі рет басу керек) және **Result Format** сұхбат терезінде қажетті параметрлерді орнату керек. Егер сіз осы әрекеттерді формуланы ерекшелемей жасаса, онда нәтиженің пішімі бүкіл құжатта өзгереді (яғни жаһандық).



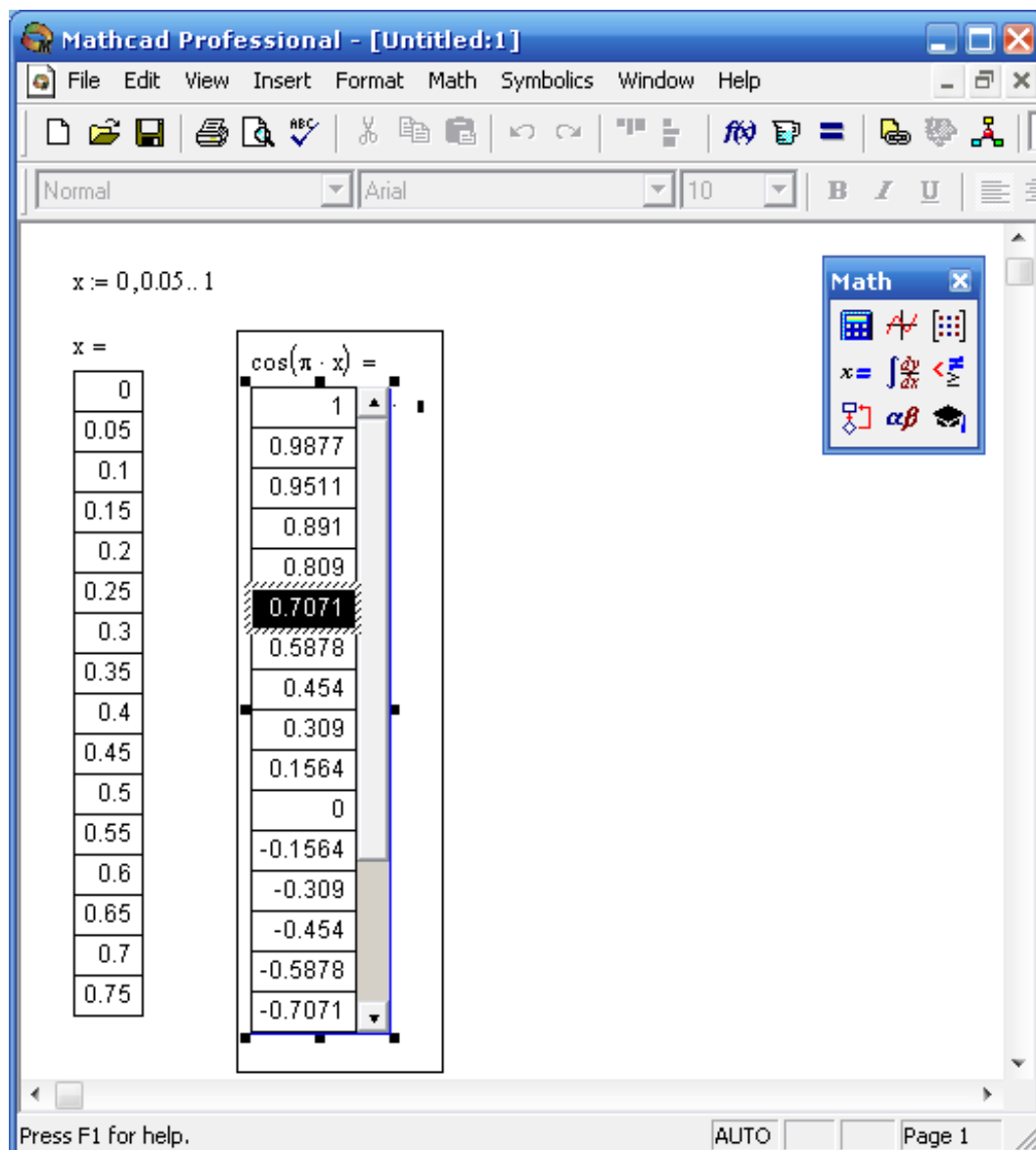
Сурет 2

Мысал 2. x айнымалысы 0, 0.05, 0.1,...,1 мәндерді қабылдасын, яғни, 0.05 қадамымен $[0, 1]$ сегментінде өзгереді. x айнымалысының көрсетілген өзгерісі кезінде $\cos(\pi x)$ функциясының мәндер кестесін алу қажет.

Мәселені шешу үшін біз x рейтингісін енгіземіз, яғни келесі тағайындауды орындаймыз: $x:=0,0.5..1$. Осыдан кейін, жұмыс құжатына $\cos(\pi x)$ енгізу және пернетақтадағы теңдік белгісін басу ғана қалады. Алынған есептеу нәтижесі кесте түрінде ұсынылады, тінтуірді басқан кезде айналдыру жолағы пайда болады.

Айналдыру жолағының жүгірткісін жылжыту арқылы бастапқы функцияның мәндерінің толық жиынтығын көруге болады.

Mathcad жүйесіндегі құжаттың мүмкін көрінісі 3-суретте көрсетілген., мұнда x айнымалысының мәні де көрсетіледі.



Сурет 3

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. Mathcad жүйесінің жұмыс құжатының жоғарғы аймағында мәтіндік редактордың көмегімен Arial CYR шрифтін қолдана отырып, тегіңізді, атыңызды, нұсқа нөмірін көрсетіңіз.

2. a айнымалысына n - ге тең мән тағайындаңыз, мұндағы n -нұсқа нөмірі.

3. Өрнектің мәнін есептеңіз.

$$\sqrt[4]{\left| \cos\left(\frac{a}{13}\pi\right) \right|} + \frac{\log_3 a^5}{\operatorname{tg}\left(\frac{0.001\pi}{2}\right)}$$

4. Келесі формуламен анықталған z айнымалысының мәнін табыңыз:

$$z = \sqrt{3a + 423\sqrt[5]{31a}} - \frac{\sqrt[3]{\lg\left(\frac{1}{3a}\right)}}{\pi^{\frac{1}{3}}}$$

5. $1, 2, \dots, 8$ -ге тең мәндерді қабылдайтын x үшін $e^{-\frac{a}{1+x}}$ функция мәндерінің кестесін алыңыз.

$$\cos^2\left(\frac{a}{15}y\right).$$

6. $1, 1.3, \dots, 13$ -ге тең мәндерді қабылдайтын x үшін функция мәндерінің кестесін алыңыз.

7. Бүкіл құжаттағы нәтижені үтірден кейін тоғыз таңбамен көрсетіңіз, ал z айнымалысының мәнін үтірден кейін екі таңбамен көрсетіңіз.

Практикалық жұмыс 4-5. Функциялар. Символдық операциялар

Жоғарыда айтылғандай, Mathcad-да кіріктірілген математикалық функциялардың кең жиынтығы бар. Дегенмен, пайдаланушының өз функцияларын енгізу қажеттілігі жиі туындайды, олар келесідей анықталады:

функция атауы (аргументтер):= өрнек.

Функция-бұл аргументтермен кейбір есептеулер жүргізілетін және оның сандық мәні анықталатын өрнек (яғни функция әдеттегі мағынада түсініледі). Аргументтер мен функция параметрлері арасындағы айырмашылықты ерекше атап өткен жөн. Функция атауынан кейін жақшада көрсетілген айнымалылар оның дәлелдері болып табылады және функцияны есептеу кезінде жақшадағы мәндермен ауыстырылады. Сол жақта жақшада көрсетілмеген функция анықтамасының оң жағындағы айнымалылар параметрлер болып табылады және функция анықталғанға дейін орнатылуы керек.

Функцияның басты белгісі-мәнді қайтару, оның дәлелдерін көрсете отырып, оған сілтеме жасауға жауап ретінде оның мағынасын қайтару керек.

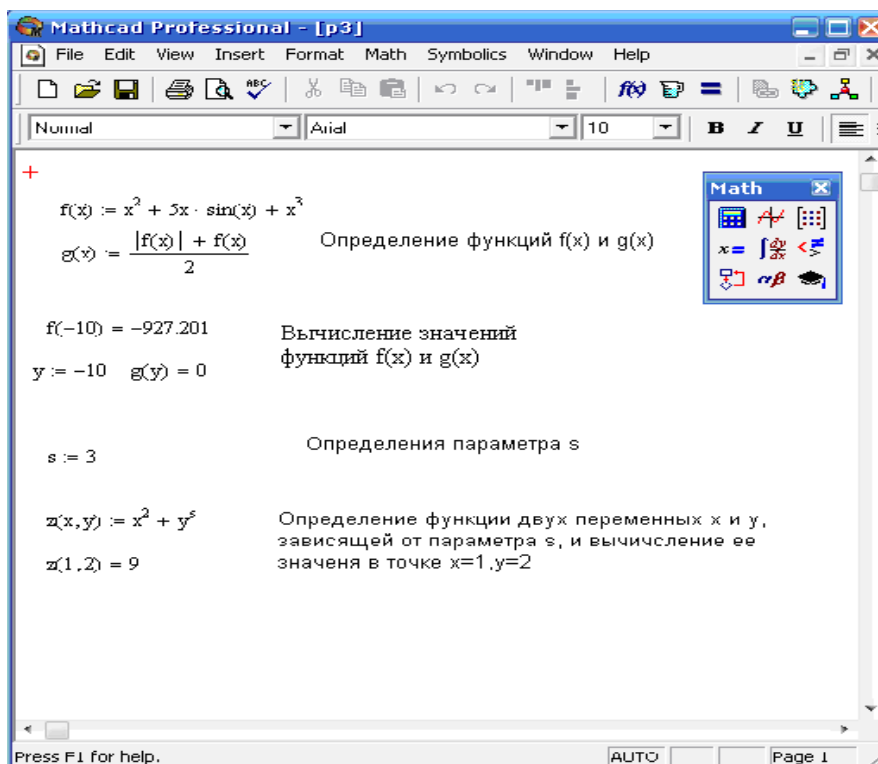
Пайдаланушының функцияларымен жұмыс істеудің қарапайым әдістері 1-суретте көрсетілген.

Функциялардың мәнін 4-суретте көрсетілген тәсілмен есептеу көбінесе шамамен өлшеу екендігіне назар аударайық. Бұл жағдай, әдетте, функцияның мәні шексіз ондық бөлшек болған кезде пайда болады. Бұл

жағдайда нақты санды алу үшін символдық түрлендірулерді қолдану қажет.

Символдық түрлендіру нәтижесін шығару үшін "→" **Symbolic** тақтасында орналасқан (**Math** тақтасын қараңыз).

Егер символдық түрлендіру нәтижесінен кейін теңдік белгісін енгізсек, онда біз сандық мәнін аламыз.



Сурет 4

Мысал 1. $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ функциясының мәндерін $\pi/6$ нүктесінде есептейміз. Символдық түрлендірудің шығыс белгісін қолдану (нәтижесін шығару) келесі нәтиже береді:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$$

Сонымен қатар, әдеттегі теңдік белгісін қолдана отырып, біз аламыз:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.366$$

Мысал 2. 72 санынан квадрат түбірді есептеудің екі әдісін қолданып, нәтижені салыстырыңыз:

$$\sqrt{72} \rightarrow 6 \cdot \sqrt{2} \quad \sqrt{72} = 8.485$$

Жалпы жағдайда символдық түрлендірулер әр түрлі болады: өрнекті жеңілдету, өрнекті факторизациялау, дәрежелер бойынша ыдырау және т.б. Сондықтан өрнек түріне байланысты символдық түрлендірудің

нәтижесі әртүрлі болуы мүмкін.

Mathcad символдық түрлендіру түрін орнатуға мүмкіндік береді. Ол үшін **Symbolic** тақтасында тиісті түрлендіру опциясын таңдау керек. Біз олардың ең көп кездесетіндерін сипаттаймыз:

simplify өрнектерді есептеу, ұқсас терминдерді келтіру, ортақ деноминаторға келтіру, тригонометриялық сәйкестендірулерді қолдану және т.б. арқылы жеңілдетуге арналған.

expand жақшаларды ашу және дәрежелерді бөлу арқылы өрнектерді кеңейту үшін қолданылады.

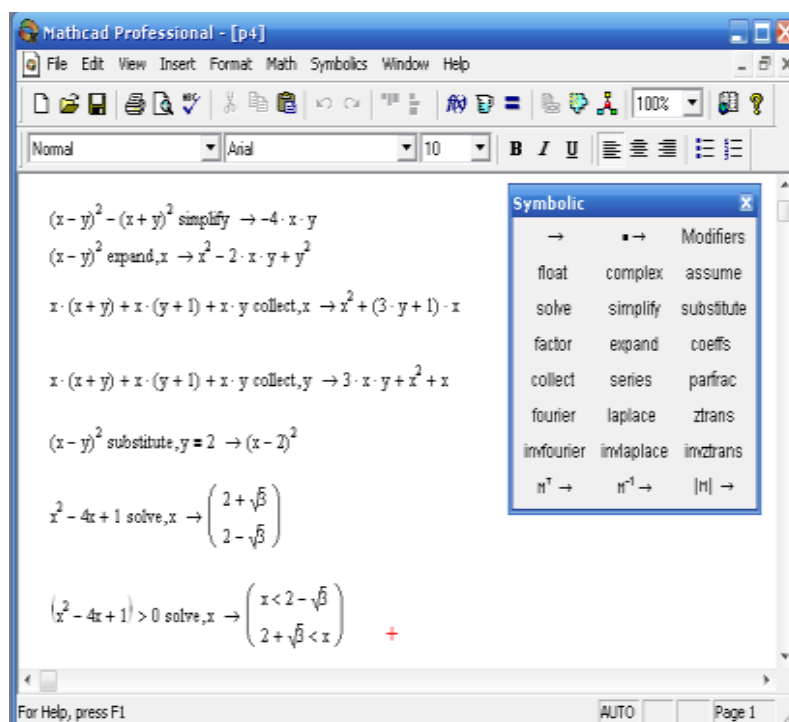
collect ұқсас терминдерді топтастыруға қызмет етеді.

substitute көрсетілген айнымалының орнына оның мәнін ауыстырады. Сонымен қатар, сан да, кейбір өрнек де айнымалы мән ретінде әрекет ете алады.

solve көрсетілген айнымалыға қатысты өрнекті шешеді. Басқаша айтқанда, көрсетілген түрлендіру берілген айнымалыға қатысты теңдеуді шешеді, ал осы теңдеудің сол жағында берілген өрнек, ал оң жағында нөл болады. Егер бастапқы өрнек теңсіздік болса, онда біз теңсіздіктің шешімін аламыз.

Символдық түрлендірулердің көрсетілген түрлерін пайдалану кезінде (**simplify** түрлендіруді қоспағанда) осы түрлендіру жүргізілетін айнымалыны көрсету қажет.

Мысал 3. Символдық түрлендірулердің қарапайым қолданылуы 5-суретте көрсетілген.



Сурет 5

Кейде **simplify** операциясын қолдану өрнекті жеңілдетпейді, бірақ оны басқа, әрдайым ықшам емес түрде де жазады. Бұл жағдайда басқа түрлендіруді қолдануға тырысқан жөн.

Мысал 4. Бастапқы өрнекті жеңілдету үшін **expand** пәрменін қолдану орынды болған жағдайды қарастырыңыз (6-сурет).

Мысал 5. Символдық түрлендірулерді өрнектермен ғана емес, сонымен бірге пайдаланушы анықтаған функциялармен де жасауға болады (7-сурет).

$$z := \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{\sqrt{5}}$$

$$z \text{ simplify} \rightarrow \frac{1}{5} \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{5}$$

$$z \text{ expand, } \sqrt{2} \rightarrow \frac{-1}{5} \cdot \sqrt{5}$$

Сурет 6

$$f(x) := \sin(x) + \cos(x)$$

$$(f(x))^2 \text{ simplify} \rightarrow 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) + 1$$

$$(f(x))^2 \text{ expand, } x \rightarrow \sin(x)^2 + 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) + \cos(x)^2$$

$$(f(x))^2 + 2 \sin(x) \cdot (\cos(x))^2 \text{ collect, } \sin(x) \rightarrow \sin(x)^2 + (2 \cdot \cos(x) + 2 \cdot \cos(x)^2) \cdot \sin(x) + \cos(x)^2$$

$$f(x) \text{ substitute, } x = \frac{\pi}{2} \rightarrow 1$$

$$f(x) \text{ substitute, } \sin(x) = 1 \rightarrow 1 + \cos(x)$$

$$f(x) \text{ substitute, } x = 2 + x \rightarrow \sin(2 + x) + \cos(2 + x)$$

$$f(x) \text{ solve, } x \rightarrow \frac{-1}{4} \cdot \pi$$

$$f(x) \text{ solve, } \sin(x) \rightarrow -\cos(x)$$

$$f1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

$$f1(x) \rightarrow \cos(x) - \sin(x)$$

Сурет 7.

Мысал 6. Бастапқы өрнекке бір уақытта бірнеше символдық түрлендірулерді қолдануға рұқсат етіледі (8-сурет). Мұны істеу үшін олар **Symbolic** панелінен дәйекті түрде енгізіледі.

$$\begin{array}{l}
 f(x,y) := x^2 + y^2 \\
 f(x,y) \left| \begin{array}{l} \text{substitute, } x = \cos(x) \\ \text{substitute, } y = \sin(x) \end{array} \right. \rightarrow \cos(x)^2 + \sin(x)^2 \\
 f(x,y) \left| \begin{array}{l} \text{substitute, } x = \cos(x) \\ \text{substitute, } y = \sin(x) \end{array} \right. \rightarrow 1 \\
 \text{simplify}
 \end{array}$$

Сурет 8.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. **Simplify** пәрмені арқылы келесі өрнектерді түрлендіріңіз:

$$\text{а) } \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{7}{11} - \frac{13}{2} + 2^3 + \frac{\pi}{3}; \text{ б) } \sqrt{b} + \frac{b^2}{5} + \frac{20}{b}.$$

2. **Expand** пәрмені арқылы өрнектегі жақшаларды ашыңыз:

$$\left(\sqrt{b} + \frac{\sqrt{5}}{b} \right)^4.$$

3. **Substitute** пәрменін қолдана отырып, $\left(\sqrt{b} + \frac{\sqrt{5}}{b} \right)^4$ өрнегіндегі b айнымалысын $b = \cos^2(x)$ ережесі бойынша ауыстырыңыз және алынған өрнектің $x = \pi$ -де нақты мәнін табыңыз.

4. **Solve** пәрменін пайдаланып $x^4 - 3x^2 - 3 = 0$ теңдеуінің шешімін табыңыз.

5. **Expand** және **simplify** командаларын дәйекті қолдану арқылы

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{b}} - \sqrt{b} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{b}} + \sqrt{b} \right)}{(b^2 - 1)^2}.$$

6. өрнекті жеңілдетіңіз:

Осы тапсырманы **expand** және **simplify** командаларын бір уақытта қолдану арқылы орындаңыз. Нәтижелерді салыстырыңыз.

7. Келесі тапсырмаларды орындау кезінде a санының орнына өз вариант нөмірін ауыстырыңыз:

а) келесі функцияларды анықтаңыз:

$$f_1(x) = \frac{1}{a}x + a \frac{1 - (-1)^a}{2} \cos(x) + a \frac{1 - (-1)^{a+1}}{2} \sin(x) + \sqrt[a]{a};$$

$$g(x) = a(1 - (-1)^a) \cos(x) + (1 - (-1)^{a+1}) \sin(x);$$

$$f(x) = f_1(x) + (-1)^a g(x);$$

б) $f(x \rightarrow)$ пәрменін пайдаланып, $f(x)$ функциясының формуласын экранға шығарыңыз;

в) $x = \pi/3$ болғандағы $f(x)$ функциясының мәнін екі жолмен көрсетіңіз: теңдік белгісін және " $\rightarrow$ " символдық түрлендіру белгісін қолдану. Алынған нәтижелерді салыстырыңыз;

$$fp(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

г) функциясын анықтаңыз және " $\rightarrow$ " белгісінің көмегімен оның формуласын экранға шығарыңыз;

д) **substitute** пәрменін пайдаланып, $x = \pi/3$ -ке тең болғандағы $fp(x)$ функциясының мәнін табыңыз;

е) **solve** пәрмені арқылы $fp(x) = 0$ теңдеуін шешіңіз.

Практикалық жұмыс 6. Графиктерді құру

Mathcad жүйесі тек жазықтықта ғана емес, сонымен қатар кеңістікте де әртүрлі графикалық функцияларды құруға мүмкіндік беретін қуатты графикалық мүмкіндіктерге ие. Графикалық құралдардың барлық жиынтығы **Insert** мәзірінің **Graph** ішкі мәзірінде орналасқан немесе **Math** тақтасында орналасқан **Graph** панелінен шақырылады.

Mathcad жүйесінде графикамен жұмыс істеу әдістерін тікбұрышты декарттық координаттар жүйесінде функциялардың графигін құру мысалдарымен талдаймыз.

$$g(x) = \frac{2}{3} \sin(2x) + \frac{1}{2}$$

Мысал 1. $[-3, 3]$ сегментінде функциясының графигін саламыз.

Функцияның аргументының өзгеру облысын қарастырайық. Ол үшін біз 0.1 қадамымен өзгертін x рейтингісін қолданамыз, яғни келесі меншіктеуді орындаймыз:

$$x := -3, -2.9 \dots 3.$$

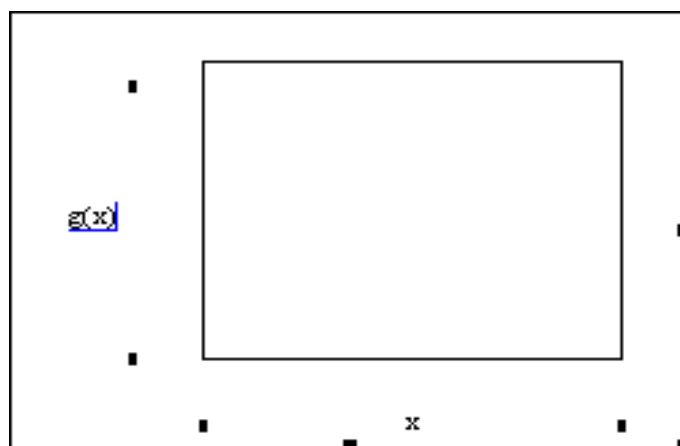
Әрі қарай, берілген функцияны анықтаймыз:

$$g(x) := \frac{2}{3} \sin(2 \cdot x) + \frac{1}{2}.$$

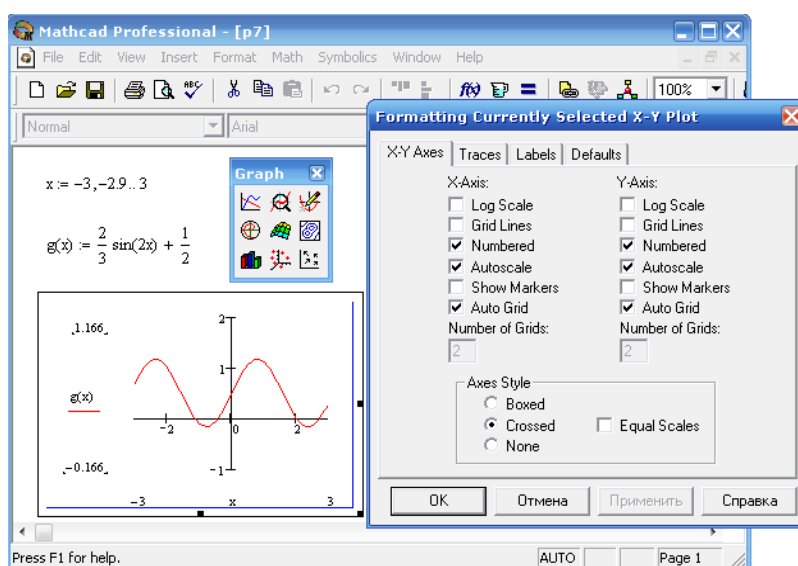
Осыдан кейін, **Graph** тақтасының  түймесіне сол жақ батырмасын басу арқылы шақырылған график үлгісіне x аргументін және $g(x)$ функциясын енгізу ғана қалады (9-сурет). Графика аймағынан тыс тінтуірдің сол жақ батырмасымен нұқу арқылы (немесе "Enter" пернесін басу арқылы) нәтижелі функцияның графигін аламыз.

Графиктің сыртқы түрін оның аумағында графиктің сол жақ батырмасын екі рет басу арқылы шақырылған пішімдеу терезесінің көмегімен өзгертуге болады. **Axes Style** тобындағы **XY-Axes** қойындысына осьтердің қиылысатын стилін орнатыңыз (**Crossed**). **Применить** түймесін басқаннан кейін біз 10-суретте көрсетілген құжатты аламыз.

Функция графигі шаблонының сол және төменгі жағында орналасқан 1.166, -0,166, -3 және 3 сандарына назар аударайық (10-сурет). Оларды мәтінмен жұмыс істеудің әдеттегі ережелеріне сәйкес өзгерту арқылы координаталық осьтердің ұзындығын өзгертуге болады.



Сурет 9.



Сурет 10

Мысал 2. Бір координаталар жүйесінде $x^2 + y^2 = 1$ шеңберін және $y=x-1$ түзуін саламыз.

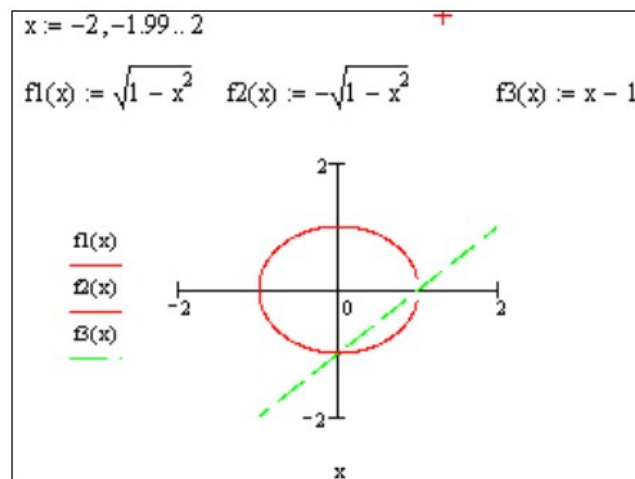
Алдымен $x^2 + y^2 = 1$ шеңбер теңдеуінен y айнымалысын табамыз:
 $y = \pm \sqrt{1 - x^2}$.

Біз x айнымалысын 0.01 қадаммен қолданамыз (егер сіз үлкен қадамды алсаңыз, онда шеңбер сызығы жеткілікті тегіс болмауы мүмкін):

$x := -2, -1.99 \dots 2$. Функцияларды анықтаймыз $f1(x) := \sqrt{1 - x^2}$,

$f2(x) := -\sqrt{1 - x^2}$, $f3(x) := x - 1$. Біз $f1$, $f2$, $f3$ функцияларын үтір арқылы графиктің шаблонының сол жақ қара квадратына енгіземіз. $f1$, $f2$, $f3$ -тің барлық үш функциясы бір айнымалыға тәуелді болғандықтан, төменгі қара шаршыда x айнымалысын бір рет көрсету жеткілікті.

Алынған $f1$, $f2$ функцияларының графикалары әртүрлі түстермен және сызық түрлерімен бейнеленген. Біз оларды бірдей етеміз. Ол үшін **Legend Label** бағанындағы **Traces** қыстырмасындағы графикті пішімдеу терезесінде $f2$ функциясының графигіне сәйкес келетін екінші **trace 2** жолын таңдаймыз. **Line** (сызық түрі) және **Color** (түс) бағандарына $f1$ функциясының графигімен бірдей мәндерді орнатамыз (**trace 1** қараңыз), яғни сәйкесінше **solid** және **red** мәндер. Осы тердің стилін өзгерткеннен кейін біз 11-суретте көрсетілген нәтижеге қол жеткіземіз.



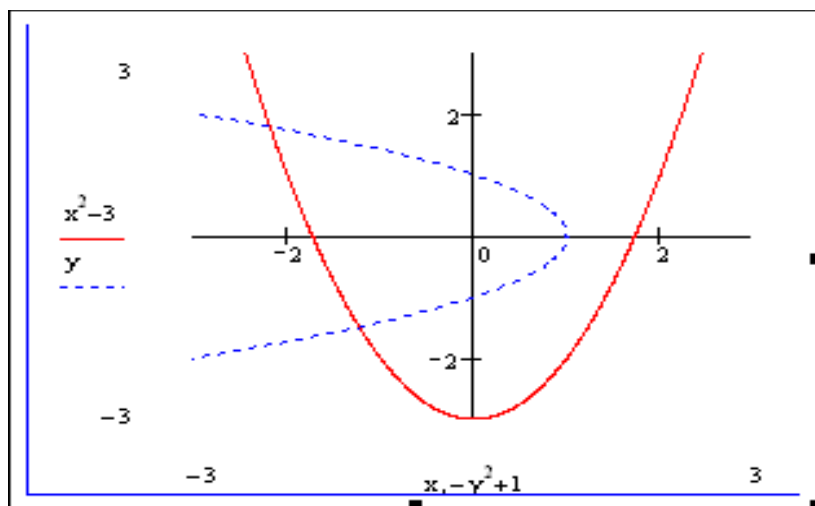
Сурет 11

Мысал 3. Теңдеулер жүйесінің шешімдерінің санын анықтаңыз:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 1 = 0, \\ x + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Мәселені шешу үшін $y = x^2 - 3$ және $x = -y^2 + 1$ функцияларының графиктерін бір координаттар жүйесінде саламыз. Аргумент y

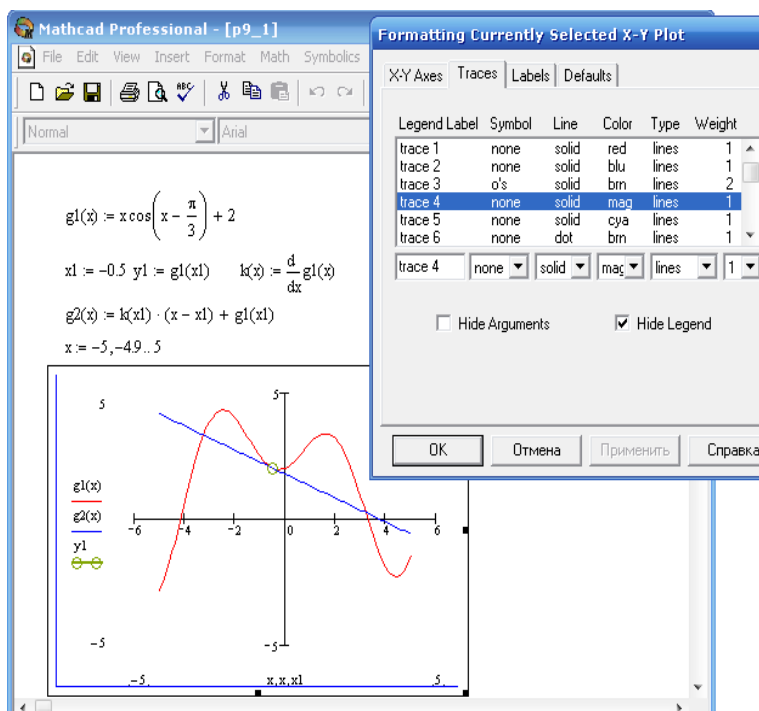
айнымалысы, ал тәуелді айнымалысы x болатын екінші функцияға назар аударайық. Функция графигінің үлгісін 12 суретке сәйкес толтырайық. (координаталық осьтердің өзгеру шамасы ең жақсы көріну жағдайынан таңдалған). Функциялар графигінде екі ортақ нүкте болғандықтан, теңдеулердің бастапқы жүйесінде екі шешім болады.



Сурет 12

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. $[-5, 5]$ сегментінде $y(x) = x \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 2$ функциясының графигін құрыңыз, аргументті өзгерту қадамы 0.1-ге тең. Алынған үлгідегі графикке $x_1 = -0.5$ -ге тең болатын нүктесінде жанама тұрғызыңыз. Үлгімен салыстырыңыз (13-сурет).



Сурет 13

x_1 айнымалысының мәнін өзгерте отырып, бастапқы функцияның өсу және кему аралығының түрлі нүктелерінде жанаманың көлбеу бұрышының өзгерісін зерттеңіз.

2. Центрі (a, b) және радиусы R -ге тең шеңбер (яғни теңдеуі $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ болатын) құрыңыз, A , b және R параметрлерінің мәнін келесі формулаларға сәйкес алдын-ала есептеп алыңыз:

$$a := (-1)^{n+1} \frac{r^{n+2}}{n} - 1, \quad b := (-1)^{n+1} \frac{r^{n+2}}{n} + 3, \quad R := \frac{r^2}{(n+1)(n+2)} + 3,$$

мұндағы n – нұсқа нөмірі.

3. Теңдеулер жүйесінің шешімдерінің санын графикалық түрде

$$\begin{cases} y + ax^2 - a(x - n) - c = 0, \\ x + a(y + \frac{n^2}{2}) + kcy = 0 \end{cases}$$

анықтаңыз

мұндағы жүйенің

коэффициенттері келесі формулалармен анықталады:

$$a := \frac{(-1)^{n+1}(1-n)(n-1)}{(n+8)(n-11)}, \quad b := \frac{15-n}{n+1}, \quad c := \frac{(-1)^{n+1}(n-10)}{n-10},$$

$$d := \frac{(-1)^{n+1}(1-n)(n+3)}{(n+5)n}, \quad k := \frac{(23-n)(n-1)}{(n-7)(n-1)}, \quad n - \text{нұсқа нөмірі.}$$

Функция графигін құру үлгісін толтырған кезде координаталық осьтердің ұзындығын өзіңіз таңдаңыз.

4. Берілген функциялар: $f(x) = n \cos\left(\frac{\pi}{2}(n-1)x\right)$ және

$g(x) = (x - q)^2 + s$, мұндағы n – нұсқа нөмірі. q және s айнымалыларына еркін мәндерді тағайындаңыз және x аргументінің $[-4, 4]$ сегменті бойынша өзгерген кездегі $f(x)$ және $g(x)$ функциясының графиктерін бір шаблонға салыңыз. $f(x)$ және $g(x)$ функцияларының графиктері $[-4, 4]$ кесіндісінде екі қиылысу нүктесі, бір қиылысу нүктесі, қиылысу нүктелері болмайтындай етіп q және s параметрлерінің мәндерін эксперименттік түрде таңдаңыз.

Практикалық жұмыс 7-8. Функция графигін тұрғызу

Бір және екі айнымалы функциялардың графиктерін құру әдістерін меңгеру.

MATHCAD-да графикалық тәуелділікті бейнелеудің қуатты мүмкіндіктері бар. Бұл: бір айнымалы функциялардың графиктері (екі өлшемдегі сызық), үш өлшемде беттерді құру, бағаналы диаграммалар, жазықтықта және т. б. екі айнымалы функцияның контурлық көрінісі.

Бір айнымалысы бар функция графиктері

- 1) бір айнымалысы бар функцияны орнату (пайдаланушы функциясын анықтау)
- 2) аргументті өзгерту ауқымын орнату (айнымалы, бірнеше мәндерді өту)
- 3) график дайындамасын кірістіру: @ (Shift+2 лат. режимінде)
- 4) алынған дайындама өрісін толтыру.

Екі айнымалысы бар функция графиктері

- 1) Екі айнымалы функцияны орнату
- 2) Тораптық нүктелердің координаталарын өзгерту ауқымын орнату (айнымалы-0-ден 1 қадаммен индекс)
- 3) Тораптық нүктелердегі функцияның мәнін есептеу (мән матрицасын алу)
- 4) Графика дайындамасын кірістіру: Ctrl+2 пернелер тіркесі
- 5) Алынған дайындама өрісін толтыру:

Бір айнымалы функциялардың графиктеріне қарағанда, бетті құру кезінде бүтін, теріс емес координаттары бар тораптық нүктелерді ғана пайдалануға болады. (0,0) (0,1) (1,1) (1,2) (2,1) (2,2) және т.б., яғни n, m – кез келген бүтін шамалар.

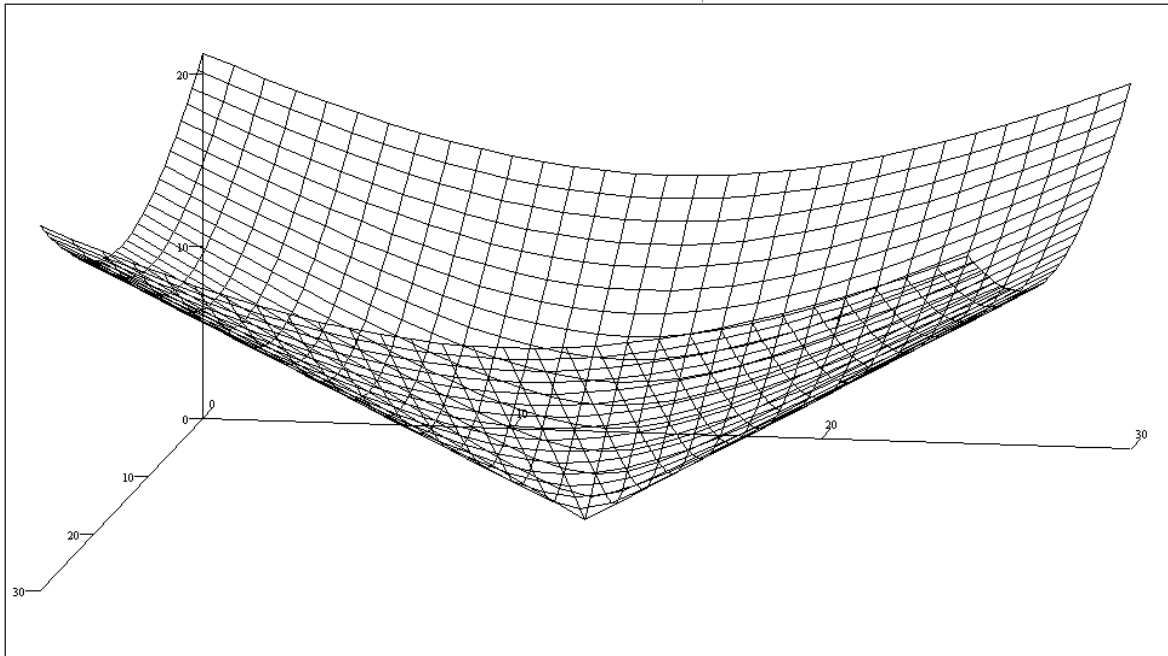
Мысал 1:

$$f(x, y) := \sqrt{(x - 15)^2 + (y - 15)^2}$$

$$kx := 0, 1 \dots 30$$

$$ky := 0, 1 \dots 30$$

$$M_{kx, ky} := f(kx, ky)$$



M

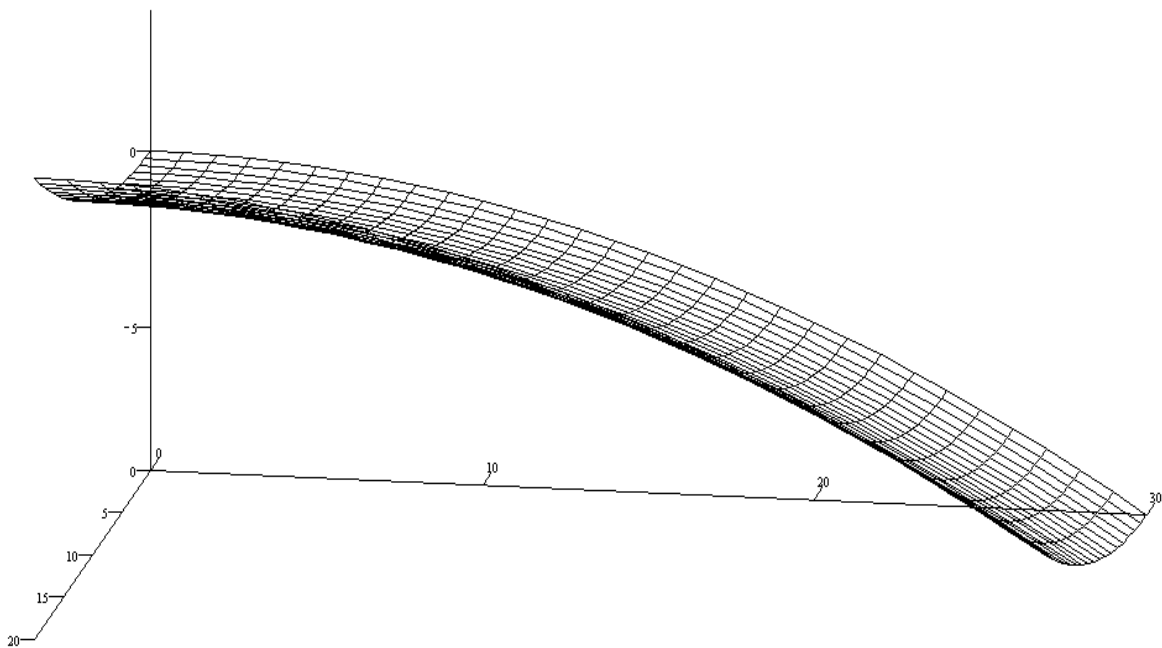
Алайда, түйіндердің координаттарын бүтін сандарға жасанды түрде келтіре отырып, аралықтарда функцияны құруға болады.

Мысал 2:

$$f(x, y) := x^2 - y^2$$

$$kx := 0, 1 \dots 20 \quad ky := 0, 1 \dots 30$$

$$M_{kx, ky} := f\left(\frac{kx}{10}, \frac{ky}{10}\right)$$



М

Осыған ұқсас, теріс емес шамаларға дейінгі айнымалыларды жасанды "тарту" аргументтердің теріс мәндерінің аймағы үшін графикті құруға болады. Мысалы, айнымалы индексті жасау қажет болса, x орнына функцияның мәнін есептеу үшін қолданамыз.

Ескерту: екі жағдайдың да комбинациясы да мүмкін (теріс мәндер + заттай қадам).

Мысал 3. $f(t) = e^{-t^2}$ функциясының графикін тұрғызу мысалы

1) Жұмыс құжатындағы бос орынды нұқып, функцияны анықтаңыз. Ол үшін $F(t)$ пернетақтасынан енгізіңіз: e^{-x^2} ("Space") және енгізу өрісінен тыс тінтуірді басыңыз.

2) Кестені бейнелеу жоспарланған жұмыс құжатындағы бос орынды

нұқып, Shift пернесін басып, @түймесін басып тұрыңыз. Экранда графика аймағы пайда болады.

3) Курсор абсцисс осінің жанында белгіленген позицияда орнатылған. Пернетақтадан t аргументінің атауын енгізіңіз, содан кейін ординат осінің жанында белгіленген позицияны нұқып, $F(t)$ клавиатурасынан енгізіп, тікбұрышты жақтаудан тыс нұқыңыз.

4) Салынған графикті үлкейтіңіз. Ол үшін төмендегілерді орындаңыз:

- Тінтуірдің меңзерін графика аймағына орналастырыңыз және тінтуірдің сол жақ түймешігімен басыңыз – график блогын жиектейтін қара сызықтардың шеңбері пайда болады.

- Тінтуірдің көрсеткішін жақтаудың оң жақ төменгі бұрышында қара квадратқа (өлшемін өзгерту маркеріне) апарыңыз, бұл ретте тінтуірдің көрсеткіші екі жақты диагональды көрсеткіге айналуы тиіс.

- Тінтуірдің сол жақ батырмасын басып, кестені диагональ бойынша созыңыз, содан кейін тінтуір түймесін босатып, өлшемді бекітіңіз.

- Тінтуірдің көрсеткішін жақтаудың кез келген жағына (шаршылардан басқа) апарыңыз, бұл ретте көрсеткіш қара алақанға айналуы тиіс.

- Тінтуірдің сол жақ батырмасын басып, барлық график блогын қалаған бағытқа жылжытыңыз және тінтуір түймесін босатып, орналасқан жерді бекітіңіз.

Нәтижесінде үлкейтілген және жылжытылған кесте болады. Рамканы тінтуірдің көрсеткішін кестеден график жағына қарай алып, тінтуірдің сол жақ батырмасын басу арқылы алып тастауға болады.

Кесте рамкада болғанда, онда бұрыштарда $F(t)$ және t осьтері бойынша график масштабын көрсететін сандар пайда болады. Әдепкі бойынша t осі бойынша кесте t аргументін өзгерту бөлігінде құрылады. $F(t)$ MathCad осі бойынша масштабты автоматты түрде орнатады. Бұл сандарды өзгерту арқылы график масштабын орнатуға болады.

1. Аргументті өзгерту аралығын енгізіңіз $[-2, 2]$. Ол үшін график өрісін нұқыңыз, содан кейін Аргументтің ең аз мәнін көрсететін сан бойынша (графиктер өрісінің шектеулі төменгі сол жақ бұрышындағы Сан), "Backspace" пернесін басып, пернетақтадан 2 енгізіңіз. Кесте өрісінің оң жақ төменгі бұрышындағы санның орнына екінші жиекті сол сияқты өзгертіңіз

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

Тапсырма нұсқаларына сәйкес (6-кестеге сәйкес) $x \in [3;20]$ өзгеру диапазоны үшін $f(x)$ функциясының графигін тұрғызыңыз.

6 кесте. Тапсырма нұсқалары

Нұсқа №	Функция номері	Нұсқа №	Функция номері
1	1, 2, 13, 15, 18	13	1, 9, 13, 21, 25
2	3, 5, 7, 20, 24	14	5, 15, 19, 23, 24
3	7, 8, 18, 19, 23	15	2, 8, 11, 17, 22
4	10, 11, 18, 19, 23	16	6, 8, 12, 14, 25
5	9, 14, 19, 23, 24	17	2, 4, 6, 8, 25
6	11, 12, 14, 17, 18	18	1, 7, 12, 17, 24
7	1, 9, 10, 16, 22	19	1, 7, 10, 13, 15
8	8, 10, 11, 21, 23	20	3, 5, 14, 18, 24
9	5, 15, 20, 23, 24	21	5, 6, 7, 13, 25
10	14, 15, 16, 17, 25	22	2, 3, 5, 9, 18
11	1, 8, 17, 24, 25	23	6, 8, 13, 17, 20
12	8, 10, 12, 15, 20	24	1, 4, 13, 20, 22

1-тапсырма үшін функциялар

1	2	3
1. $f(x) = \frac{3x^5 - 52x + 8}{(x+2)^6}$	2. $f(x) = \frac{2x^3 - 128x^2 + 16x}{(x+4)^2}$	3. $f(x) = \frac{3x^3 + 124}{8x^2}$
4. $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{(x-1)^2}$	5. $f(x) = \frac{32x^5 - 512x + 8}{(x+2)^6}$	6. $f(x) = \frac{x^3 - 9x + 27}{(x-1)^2}$
7. $f(x) = \frac{4x^3 - 256x^2 + 2x}{8x^2 + 1}$	8. $f(x) = \frac{6x^3 - 9x}{(x-1)^2}$	9. $f(x) = \frac{8x^2 - 8x + 4}{(x+1)^2}$
10. $f(x) = \frac{4x^4 - 4x}{(x^2 + 1)^2}$	11. $f(x) = \frac{x^5 - 1024x}{x^3}$	12. $f(x) = \frac{x^4 - 2x^3}{x^4 + 1}$
13. $f(x) = \frac{66x^2 - 999x}{(x+1)^2}$	14. $f(x) = \frac{x^3 - 9x^2 + 81x}{(x+1)^2}$	15. $f(x) = \frac{x^4 e^{-x}}{x^2 + 1}$
1	2	3
16. $f(x) = \frac{2x + 1}{(x+1)^2}$	17. $f(x) = \frac{7x}{(x-1)^2}$	18. $f(x) = \frac{x^3 - 27x + 54}{x^2}$
19. $f(x) = \frac{5x^3}{(x+1)^2}$	20. $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 8}{(x+1)^2}$	21. $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{(9x+1)^2}$
22. $f(x) = \frac{2x^4 - 16x + 64}{(x+1)^4}$	23. $f(x) = \frac{x^2 e^{-x-3}}{x+1}$	24. $f(x) = \frac{3x^3 + 24}{(7x+1)^2}$
25. $f(x) = \frac{2x^2 - 16x + 64}{(x+1)^2}$		

Практикалық жұмыс 9-10. Теңдеулерді шешу

Көптеген теңдеулер мен теңдеулер жүйелері нақты шешімге келмейтіні белгілі. Бұл ең алдымен трансцендентальды теңдеулердің көпшілігіне қатысты. Алайда, мұндай теңдеулерді берілген дәлдікпен сандық (жуық) әдістермен шешуге болады (берілген TOL жүйелік айнымалысының мәнінен аспайды).

Mathcad жүйесін қолдана отырып, теңдеулерді шешудің кейбір жолдарын қарастырыңыз.

I. Root функциясын қолдану.

$f(x)=0$ түріндегі теңдеулерді $f(x)=0$ теңдігі орындалатын x айнымалысының мәнін қайтаратын **root(f(x),x)** функциясы арқылы шешуге болады. Бұл функцияны пайдалану үшін түбірге бастапқы жуықтауды орнату керек.

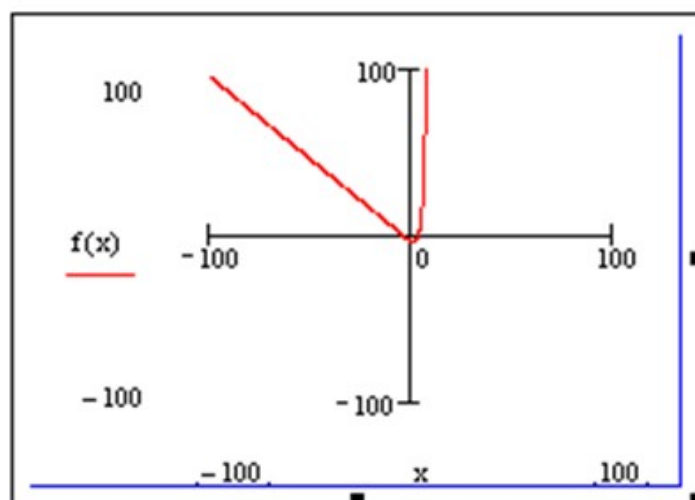
Мысал 1. $f(x) = 0$ теңдеуінің түбірлерін табу керек, мұндағы

$f(x) = 2^x - \frac{x^3}{x^2 + 1} - 5$. **Root** функциясын қолданбас бұрын, түбірдің жуық

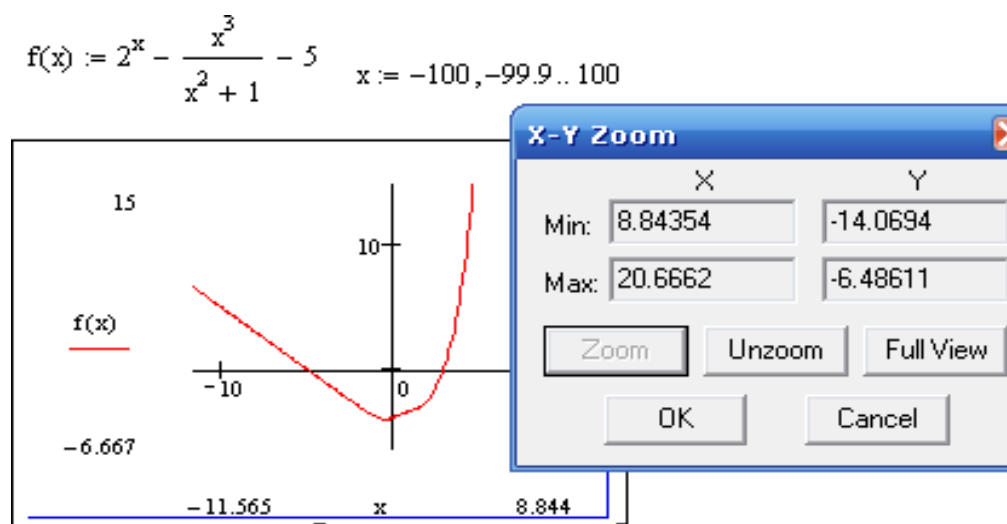
(бастапқы) мәнін анықтау керек. Ол үшін графикалық әдісті қолданамыз. Түбір функциясын қолданбас бұрын, түбірдің жуық (бастапқы) мәнін анықтау керек. Ол үшін графикалық әдісті қолданамыз.

$f(x)$ функциясын анықтаймыз. Содан кейін функцияны анықтау аймағын эксперименталды түрде өзгерте отырып, біз функция графигіндегі өзгерістің жалпы динамикасын зерттейміз. 14-суреттен $f(x)$ функциясы абсцисса осін нөлдік нүктеге жеткілікті "жақын" орналасқан нүктелерде кесіп өтуі мүмкін екенін көруге болады. Нөлге жуық "аймақтағы" функцияның әрекетін егжей-тегжейлі зерттеу үшін біз функция графигінің бізге қажетті аймағын арттырамыз. Ол үшін тінтуірдің сол жақ батырмасымен **Graph** тақтасында орналасқан  түймесін басамыз. Осыдан кейін **X-Y Zoom** қосымша сұхбат терезесі пайда болады. Тінтуір мензерін графиктегі таңдалған аймақтың жоғарғы сол жақ бұрышына апарыңыз, тінтуірдің сол жақ батырмасын басып, тінтуірді төмен және оңға созамыз. Графиктегі белгіленген аймақ нүктелі сызықпен белгіленеді. Тінтуірдің сол жақ батырмасын босатып, диалогтық терезеде масштабтау **Zoom** түймесін басамыз.

$$f(x) := 2^x - \frac{x^3}{x^2 + 1} - 5 \quad x := -100, -99.9 \dots 100$$



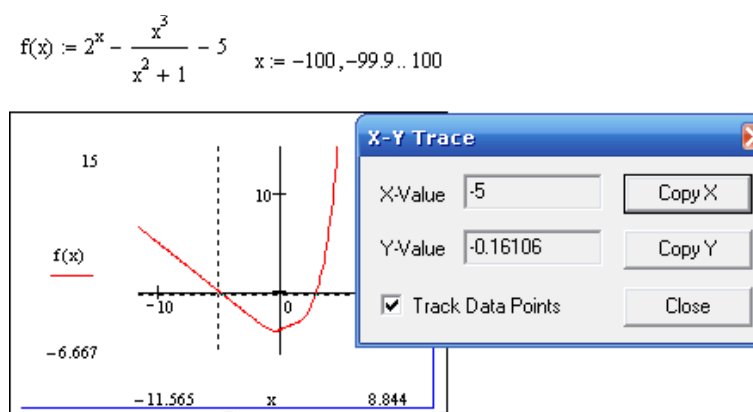
Сурет 14



Сурет 15

Белгіленген аймақтың графигі құрылады (14-сурет). Бұл аймақта сіз жаңа аймақты дәл осылай орната аласыз және т.б. **Unzoom** батырмасы тандалған аймақты артқа қайтарады. **FullView** батырмасы графиктің бастапқы аймағын қалпына келтіреді.

15-суреттен бастапқы теңдеудің екі түбірі бар екенін көруге болады. Алдымен сол жақ түбірдің жуықталған мәнін анықтаймыз. Мұны тінтуірдің сол жақ батырмасымен **Graph** панелінің  батырмасын басу арқылы шақырылатын бақылау құралының көмегімен жасауға болады. Нәтижесінде **X-Y Trace** сұхбат терезесі пайда болады. Тінтуір көрсеткішіне ең жақын сызық тандалуы үшін **Track Data Points** құсбелгісін қойыңыз. Тінтуір меңзерін графиктің қажетті нүктесіне қойыңыз (бұл нүкте екі нүктелі сызықтың қиылысында көрсетіледі). Бақылау терезесінде графиктің белгіленген нүктесінің координаттары пайда болады. Бұл координаттарды алмасу буферіне жылжытуға болады, содан кейін оларды Mathcad құжатына немесе Word сияқты басқа құжатқа да қоюға болады (16-сурет).



Сурет 16

Трассировка көмегімен -5-ке тең сол жақ түбірдің жуықтау шамасының мәні табылғаннан кейін (16-суреттегі трассировка терезесін қараңыз), оны **Root** функциясы арқылы нақтылауға болады. Осылай бастапқы теңдеудің оң жақ түбірін де анықтаймыз. Нәтижесінде бастапқы теңдеудің екі түбірін аламыз (17-сурет).

$x := -5$	$\text{root}(f(x), x) = -5.159$
$x := 3$	$\text{root}(f(x), x) = 2.931$

Сурет 17

Root функциясын түбірге бастапқы жуықтауды көрсетпей қолдануға болады. Бұл жағдайда қажетті түбірі бар сегменттің ұштарын көрсету керек, ал көрсетілген сегментте ол жалғыз болуы керек. Мысалы, 1-мысалда теңдеуінің сол жақ түбірін келесідей табуға болады:

$$\text{root}(f(x), x, -6, -4) = -5.159$$

Бұрын **solve** символдық операциясын қолдана отырып, теңдеудің нақты шешімін қалай алуға болатындығы көрсетілген. Осыған байланысты **Root** функциясы анағұрлым күшті құрал болып табылады және оны теңдеудің символдық шешімі оң нәтиже бермейтін жерде қолданған жөн. Мысалы, 1-мысал теңдеуін таңбамен шешуге тырысып, келесі түрдегі нәтиже аламыз:

$$f(x) \text{ solve}, x \rightarrow .11541892817945669740 + .98503017522364303516 \cdot i$$

бұл жоғарыда табылған шешімге мүлдем сәйкес келмейді.

Root функциясының нәтижесі жалпы жағдайда жуықталған болып табылады. Әдетте, теңдеудің жуық шешімін табудың математикалық әдістері кейбір итерациялық процесс болып табылады. Атап айтқанда, теңдеудің түбіріне бастапқы жақындау орнатылады, содан кейін әр итерацияда бұл мән нақтыланады. Теңдеудің түбіріне соңғы екі жуықтаудың айырмашылық модулі берілген оң саннан аспаған кезде процесс тоқтайды (бұл шешімнің дәлдігі деп саналады).

Mathcad жүйесіндегі есептеу процесінің дәлдігін TOL жүйелік айнымалы көмегімен басқаруға болады. Қалыпты жағдайда TOL=0.001. Жұмыс құжатының белгілі бір нүктесіндегі дәлдікті өзгерту үшін пішімін

меншіктеуді қолдану керек, мысалы, $TOL:=0.000001$. Бүкіл құжаттың ішіндегі дәлдікті өзгерту үшін **Math** мәзірінің **Options** ішкі мәзірінен шақырылған **Math Options** терезесінің **Built-inVariables** қыстырмасындағы **TOL** айнымалысының мәнін өзгерту керек.

Есептеулердің дәлдігін нәтижені шығару форматынан ажырату керек. Әдетте берілген дәлдікке сәйкес келетін ондық бөлшектердің саны орнатылады. Мысалы, егер есептеулер $TOL = 0.000001$ дәлдігімен жүргізілсе, онда шығыс форматында үтірден кейін 6 немесе 7 таңбаны көрсету қисынды. Екінші жағдай әдетте есептеу нәтижесін талдау үшін қолданылады.

II **Given – find** конструкциясын пайдалану.

Mathcad жүйесіндегі теңдеулерді шешудің тағы бір әдісі – $f(x)=g(x)$ түріндегі теңдеулерді шешуге арналған **Given – find** конструкциясын қолдану. Теңдеулерді шешудің осы әдісін қолдану келесі кезеңдерден тұрады:

- x айнымалысына теңдеудің түбіріне бастапқы жуықтауды орнату;
- **Given** кілт сөзін теру;
- бастапқы теңдеуді $f(x)=g(x)$ түрінде жазу, бұл кезде теңдік белгісі **Boolean** панелінен теріледі (немесе $\text{Ctrl}+=$ пернелер комбинациясы);
- $\text{find}(x)=$ теру.

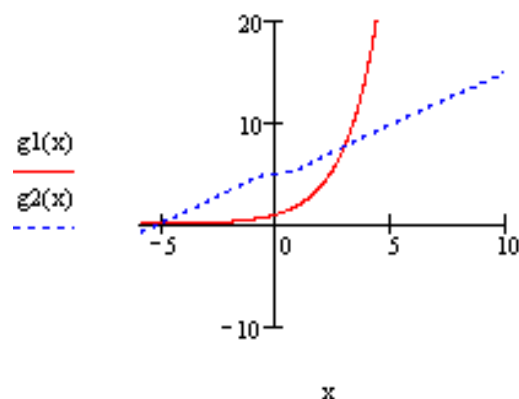
Мысал 2. 1-мысалдағы теңдеуінің түбірлерін табалық. Бастапқы

теңдеуді келесі түрде жазалық $2^{x^2} = \frac{x^2}{x^2-1} + 5$ (18-сурет). Мұндай

теңдеудің шешімі: $g_1(x) = 2^x$ және $g_2(x) = \frac{x^2}{x^2-1} + 5$ функцияларының графиктерінің қиылысу нүктесінің абсциссасы болып табылады.

Президентіміз кестелері осы функцияларды графиктерін тұрғызып, трассировка көмегімен бастапқы жуықтауды табамыз. Әрі қарай, жоғарыда көрсетілген төрт кезеңді аяқтағаннан кейін біз бастапқы теңдеудің түбірлерінің бірін аламыз. Сол сияқты екінші түбірді табамыз (18-сурет).

$$g1(x) := 2^x \quad g2(x) := \frac{x^3}{x^2 + 1} + 5$$



$$x := -5$$

Given

$$g1(x) = g2(x)$$

$$\text{find}(x) = -5.159$$

$$x := 2.848$$

Given

$$g1(x) = g2(x)$$

$$\text{find}(x) = 2.931$$

Сурет 18.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

Келесі тапсырмаларда n әрпінің орнына өз вариант нөміріңізді ауыстырыңыз.

$$\arctg\left(\frac{x}{n} - 2\right) + \frac{3}{2}(n - 2x) - \frac{2}{n} = 0$$

1. Теңдеудің түбірін табыңыз:

Шешімді екі әдіспен орындау керек: **root** функциясын және **Given – find** конструкциясын пайдалану.

2. **Root** функциясын қолдана отырып, $[-5, 0]$ сегментінде

$$e^{\frac{x}{n+5}} + \sin(x) + \frac{x}{n+5} = 0$$

теңдеуінің түбірлерін табыңыз. Есептеулердің дәлдігін 0.001 (қалыпты жағдайда), 0.0000000001, 0.0000000000000001-ге орнатыңыз. Әр жағдайда нәтиженің тиісті форматын орнатыңыз және түбірді теңдеуге қою арқылы нәтижені берілген дәлдікпен және нөлмен салыстырыңыз. Қорытынды жасаңыз.

3. **Root** функциясын және **Given-find** конструкциясын қолдана отырып, келесі теңдеулердің түбірлерін табыңыз:

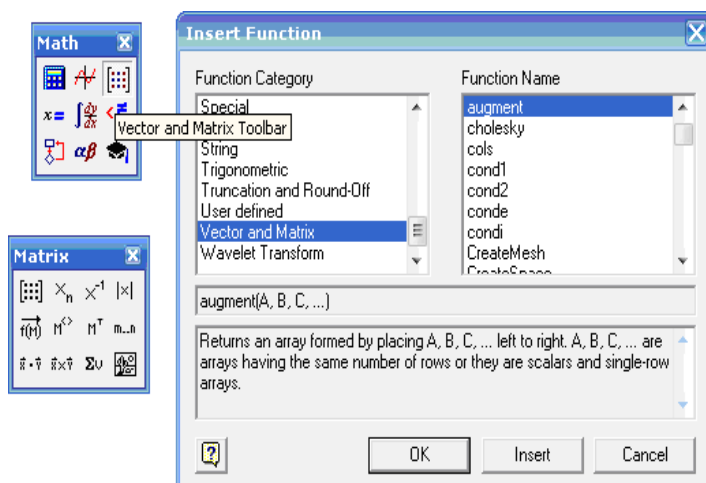
$$\begin{aligned} \text{a) } & \sqrt{4 + \frac{1}{n} - x^2} - \cos\left(\frac{n}{x^2 + n}\right) = 0; \\ \text{б) } & \frac{0.745 + n}{4 - n + 0.23} \sin\left(\frac{x}{24.5} + \frac{\pi}{11}\right) + \frac{n-4}{\pi - n} x + \frac{n}{2} = 0; \\ \text{в) } & \sqrt{\left(3 + \frac{n+1}{n}\right) - \left(x - 2 - \frac{n+2}{n}\right)^2} - \sqrt{\frac{n+x}{n} - (x-1)^2} = 0; \\ \text{г) } & \sqrt[7]{\frac{x^9}{n} - \sin\left(\frac{x}{n}\right)} + \cos\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{n}{n+1} = 0. \end{aligned}$$

4. Модулі бойынша үш минималды теңдеу түбірін табыңыз

$$\cos\left(x + \frac{n}{\pi + 1}\right) + \sin\left(x + \frac{n}{\pi}\right) = 0$$

Практикалық жұмыс 11-12. Векторлармен және матрицалармен операциялар

Mathcad жүйесінде векторлар мен матрицалармен жұмыс істеудің қуатты құралдары бар. Ең жиі қолданылатын функцияларға **Math** құралдар тақтасында орналасқан **Matrix** тақтасы арқылы қол жеткізуге болады, қалғандарын функцияны кірістіру сұхбат терезесінің **Vector** and **Matrix** санатынан табуға болады (19-сурет).



Сурет 19

Матрицаны енгізу үшін **Matrix** тақтасында орналасқан  батырмасына тінтуірдің сол жақ батырмасын басу арқылы шақырылған шаблонды қолдануға болады. Осыдан кейін сұхбат терезесі пайда болады,

онда енгізетін матрицаның жолдарының (Rows) және бағандарының (Columns) санын көрсету керек. Әрі қарай, пайда болған шаблонға матрица элементтері енгізіледі.

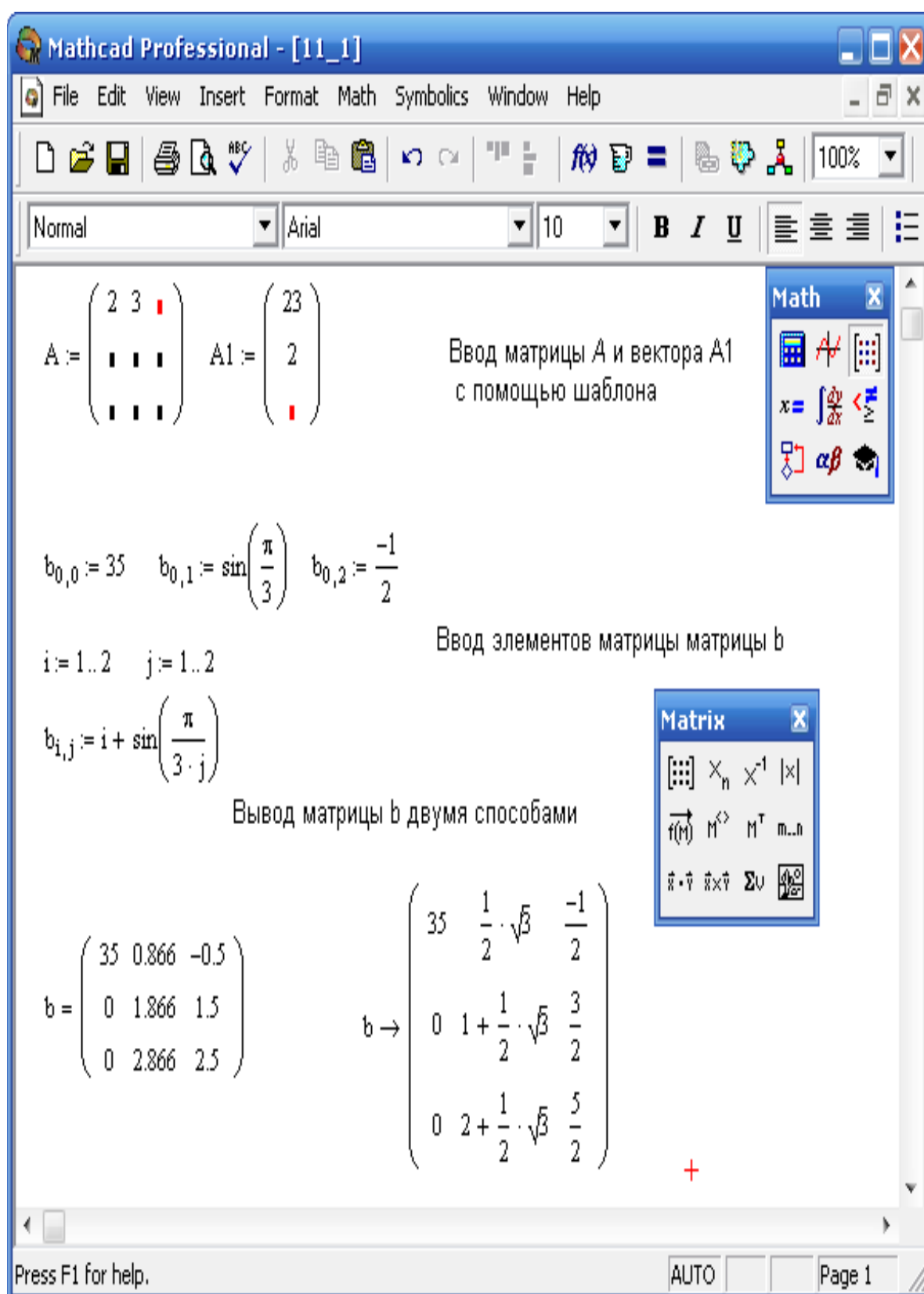
Матрицаны оның индекстеріне байланысты матрица элементінің қалыптасу заңын аналитикалық түрде көрсету арқылы да енгізуге болады (жолдар мен бағандардың нөмірлері, яғни осылардың қиылысында элемент орналасқан). Индексті енгізу үшін " ["пернесін пайдалану ыңғайлы (сонымен қатар **Calculator** немесе **Matrix** матрица тақтасында орналасқан  батырмасын басу арқылы шаблонды пайдалануға болады). Матрица элементінің индекстері үтірмен енгізіледі, ал бірінші орында – бұл элемент орналасқан жол нөмірі, ал екінші орында – баған нөмірі. Қалыпты жағдайда, Mathcad матрицаның жолдары мен бағандарын нөлден бастап нөмірлейді. Бірліктен басталатын әдеттегі индекстік нөмірлеуді пайдалану үшін ORIGIN жүйелік айнымалы мәнін (қалыпты жағдайда нөлге тең) бірлікке өзгерту керек.

Матрицаны $m \times n$ ретті матрицаны құрайтын **matrix(m,n,f)** функциясын қолдана отырып та енгізуге болады, ал i, j индекстері бар элемент $f(i,j)$, мұндағы f – екі айнымалымен берілген функциясы. Бұл жағдайда, ORIGIN жүйелік айнымалы мәніне қарамастан, i және j индекстері нөлден $m-1$ және $n-1$ -ге өзгереді.

n ретті векторды $n \times 1$ өлшемді матрицасының ерекше жағдайы ретінде қарастыруға болады, сондықтан оны енгізу үшін жоғарыда сипатталған матрицаны енгізу әдістерін қолдануға болады. Сонымен қатар, вектор элементтерін нөмірлеу үшін бір саннан тұратын индексті – тиісті элементтің нөмірін де қолдануға болатындығын есте ұстаған жөн.

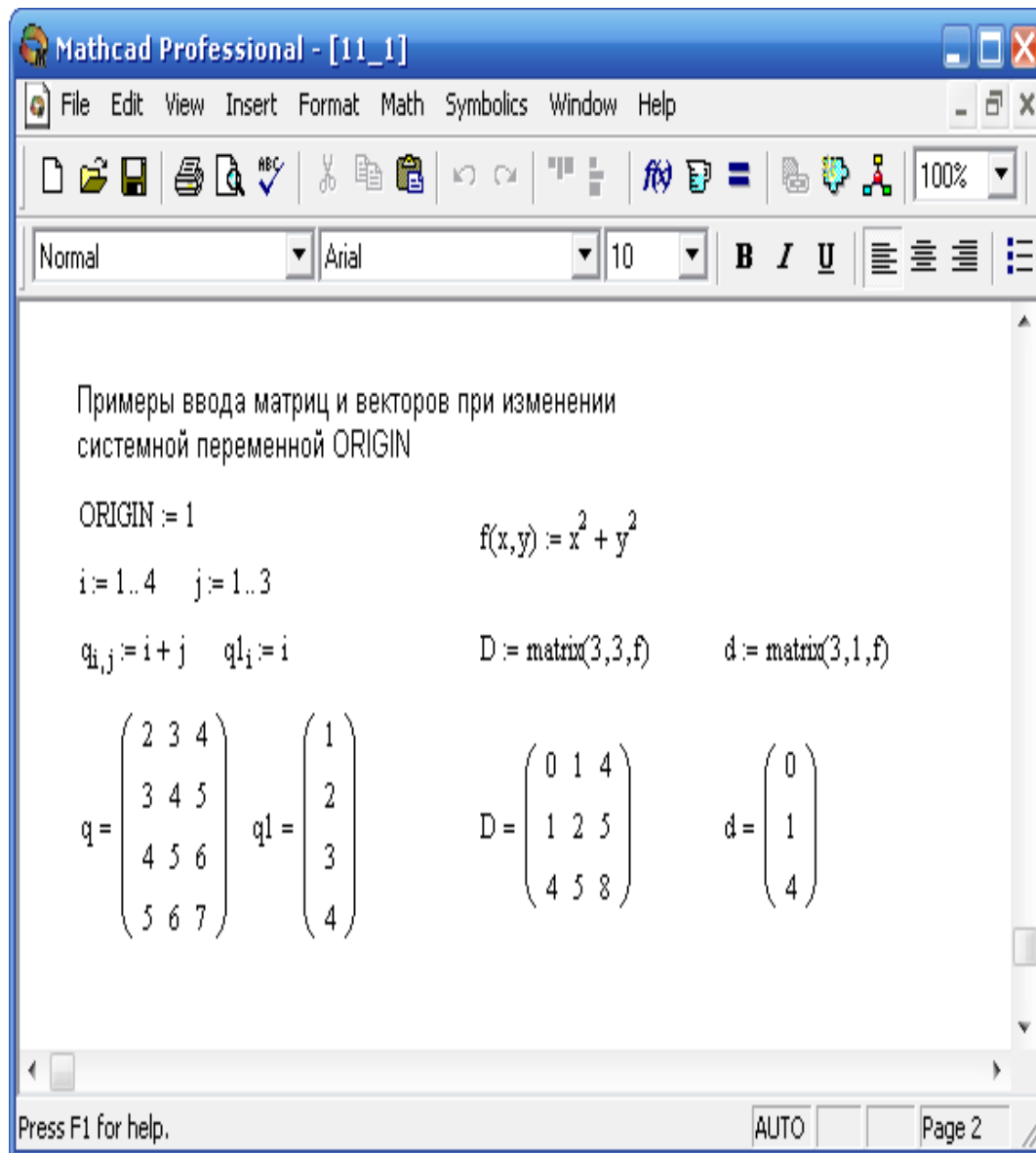
Мысал 1. Шаблонды қолдана отырып матрицаны енгізу және жекеленген мысалдары 20-суретте көрсетілген.

b матрица элементтерін енгізу мысалына назар аударайық. Осы матрицаның бірінші жолы элемент бойынша енгізілді. Қалған жолдар үшін элементтердің қалыптасу заңы белгіленді. Ол үшін i және j сараланған айнымалылар қолданылды. Алынған b матрицасын шығару екі жолмен жүзеге асырылуы мүмкін: "=" пернесін немесе "→" символдық түрлендіру белгісін қолдана отырып.



Сурет 20.

Мысал 2. 21-суретте ORIGIN жүйелік айнымалысының өзгеру кезінде векторлар мен матрицаларды еңгізу әдістері келтірілген.



Сурет 21.

Mathcad векторлар мен матрицалармен қарапайым сандар мен айнымалылар сияқты қарапайым жұмыс істеуге мүмкіндік береді. Матрицаларды қосу, көбейту, матрицаны санға көбейту, сондай-ақ матрицаны дәрежеге көтеру операциялары тиісті математикалық белгіні теру арқылы жасалады. Кері матрицаны есептеу, матрицаның анықтауышын (немесе вектор модулін) және транспонерлеген матрицаны есептеу үшін сәйкесінше **Matrix** тақтасының $\times^{-1}$, $|\times|$, M^T батырмалыры қолданылады. Дәл осындай әрекеттерді символдық түрде **Symbolic** панельдерінің тиісті батырмаларын: $M^{-1} \rightarrow$, $|M| \rightarrow$, $M^T \rightarrow$ қолдана отырып та жасауға болады.

Мысал 3. 22 – суретте матрицалармен жұмыс істеудің қарапайым

тәсілдері келтірілген.

Mathcad Professional - [p_11]

File Edit View Insert Format Math Symbolics Window Help

Normal Arial 10 B I U

Примеры сложения и умножения матриц

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -4 & 5 & 6 \\ -0.34 & \frac{1}{2} & 12 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{21}{2} \\ 7 & \frac{3}{4} & -4.7 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad A + B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 16.5 \\ 3 & 5.75 & 1.3 \\ 0.66 & 5.5 & 17 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 28 & 34.25 & 26.4 \\ 37 & 25.75 & -35.5 \\ 15.16 & 59.695 & 54.08 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} 0.5 & 1.5 & 3 \\ -2 & 2.5 & 3 \\ -0.17 & 0.25 & 6 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} -129.68 & 113.88 & 1.2 \times 10^3 \\ -116.56 & 40.88 & 875.76 \\ -85.626 & 90.62 & 1.746 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Результат можно выводить с помощью знака символического преобразования

$$A \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} 28 & \frac{137}{4} & 26.400000000000000 \\ 37 & \frac{103}{4} & -35.5 \\ 15.160000000000000 & 59.695000000000000 & 54.080000000000000 \end{pmatrix}$$

Для заданной матрицы A найдем транспонированную матрицу, определитель матрицы A и обратную матрицу

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -0.34 \\ 3 & 5 & 0.5 \\ 6 & 6 & 12 \end{pmatrix} \quad |A| = 193.08 \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.295 & -0.171 & -0.062 \\ 0.238 & 0.073 & -0.155 \\ -1.554 \times 10^{-3} & -7.872 \times 10^{-3} & 0.088 \end{pmatrix}$$

Сурет 22.

Мысал 4. Матрицалармен символдық түрлендірулерді де жүргізуге болады (23-сурет).

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 4 & y^2 \\ 1 & x & 0 \end{pmatrix} \rightarrow -4 \cdot y \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 4 & y^2 \\ 1 & x & 0 \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \cdot y \cdot x & -\frac{1}{4} \cdot x & -\frac{1}{4} \cdot y \cdot x + 1 \\ -\frac{1}{4} \cdot y & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \cdot y \\ \frac{1}{y} & 0 & -\frac{1}{y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sin(x) & -\cos(x) \\ \cos(x) & \sin(x) \end{pmatrix} \rightarrow \sin(x)^2 + \cos(x)^2$$

$$\begin{pmatrix} \sin(x)^2 & \cos(x)^2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(x)^2 & \sin(x)^2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Сурет 23.

Матрицалармен және векторлармен жұмыс істеу үшін бірқатар пайдалы функцияларды келтіреміз:

* **augment(M1,M2)** – жолдар саны бірдей екі матрицаны біреуге біріктіреді (біріктіру "қатар қатар"жүреді);

* **cols(M)** – M матрицасының бағандарының санын қайтарады;

* **identity(n)** – $n \times n$ өлшемді бірлік матрицасын жасайды;

* **last(V)** - V векторының соңғы элементін қайтарады;

* **length(V)** – V векторының элементтерінің санын қайтарады;

* **max(M)** - вектордың немесе M матрицаның максималды мәнін қайтарады;

* **min(M)** – M матрицасының ең аз мәнін қайтарады;

* **rows(M)** – M матрицасының жолдарының санын қайтарады;

* **stack(M1, M2)** - бірдей бағандар саны бар екі матрицаны "бір-біріне отырғызу"арқылы біріктіреді;

* **submatrix (A,r1,r2,c1,c2)** – r1-ден r2-ге дейінгі жол сандары бар және c1-ден c2-ге дейінгі баған сандары бар матрицаның фрагментін қайтарады. Егер $r1 > r2$ болса, онда біз матрицаның фрагментін жолдардың кері реті бойынша аламыз, бұл бағандарға да қатысты.

Матрицалармен жұмыс істеуге арналған қалған функцияларды функция кірістіру сұхбат терезесінің **Vector and Matrix** санатынан табуға болады.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. Матрицаны еңгізу үлгісін қолдана отырып келесі матрицаларды

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0.5 \\ \frac{1}{3} & 4 & -2 \\ \sqrt{2} & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & \sqrt{2} \\ \sqrt[3]{3} & 5 & 4 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{және} \quad s = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{векторды}$$

еңгізіңіз. Есептеңіз: $A + B$, $A \times s$, $\sqrt[5]{2} \times A$. А матрицасына қатысты A^T транспонерленген матрицасын, A^{-1} кері матрицасын және А матрицасының анықтауышын табыңыз. Нәтижелерді екі жолмен шығарыңыз: әдеттегі теңдік белгісін және символдық түрлендіру белгісін қолдану.

2. 1-ге тең ORIGIN жүйелік айнымалы мәнін тағайындаңыз және 100x100 өлшеміндегі В матрицасын құрыңыз, оның әр элементі келесі

$$b_{i,j} = \cos\left(\frac{\pi}{i+1}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{j}\right)$$

формуламен анықталады: Матрицалармен жұмыс істеудің тиісті функцияларын қолдана отырып, b матрицасының максималды және минималды элементтерін табыңыз.

3. **Matrix** функциясын қолдана отырып, элементтері $C_{i,j} = \cos(\pi \cdot i) + \sqrt{j}$ формуласымен анықталатын С матрицасын еңгізіңіз. Алынған матрицадан бастапқы матрицаның екінші-төртінші жолынан және екінші-үшінші бағандарынан тұратын фрагмент-матрицаны тандаңыз. Алынған қосалқы матрицада бағандардың ретін өзгертіңіз (сонымен қатар **submatrix** функциясын қолданыңыз).

$$\begin{pmatrix} x & \sqrt[3]{x} & 3 \\ 1 & x+y & -4 \\ \frac{1}{y} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Берілген матрицасы үшін кері матрица мен матрицаны (детерминантты) табыңыз. Табылған анықтауышты мәні $x=3$, $y=1$ болғандағысын есептеңіз. Соңғы тапсырманы үлгімен салыстырыңыз (24-сурет).

$$\left| \begin{pmatrix} x & \sqrt[3]{x} & 3 \\ 1 & x+y & -4 \\ \frac{1}{y} & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| \rightarrow \frac{1}{y} \cdot \left[-4 \cdot \left(\sqrt[3]{x} \right)^{\left(\frac{1}{2} \right)} - 3 \cdot x - 3 \cdot y \right] \begin{matrix} \text{substitute, } x = 3 \\ \text{substitute, } y = 1 \end{matrix} \rightarrow -4 \cdot \sqrt[3]{27} - 12$$

Сурет 24.

Практикалық жұмыс 13. Векторлар мен матрицаларды қолдану. Теңдеулер жүйелерін шешу

Бірқатар математикалық есептерді шешуде Mathcad жүйесінде векторлар мен матрицаларды тиімді пайдалану мысалдары келтірілген.

I. Алгебралық теңдеулерді шешу

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

мұндағы $n \geq 1$ – кейбір натурал сандар, ал $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ – кейбір нақты сандар. Осы типтегі теңдеулерді шешу үшін **polyroots(v)**

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

функциясын қолдануға болады, мұндағы

Мысал 1. $x^3-4x^2+2=0$ теңдеуін шешеміз . Біз оны стандартты түрге келтіріп $x^3-4\cdot x^2+0\cdot x+2=0$ қайта жазамыз . Әрі қарай, v векторын еңгізу арқылы біз **polyroots** функциясын қолданамыз (25-сурет).

$$\mathbf{v} := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{polyroots}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -0.655 \\ 0.789 \\ 3.866 \end{pmatrix}$$

Сурет 25.

25-суретте көрсетілгендей **polyroots** функциясы координаттары бастапқы теңдеудің түбірі болып табылатын векторды қайтарады.

II. Сызықтық алгебралық тендеулер жүйесін шешу жолдарын қарастырамыз:

[illegible]

мұндағы $a_{i,j}$, және b_i – кейбір натурал сандар.

Бұл жүйені матрица түрінде қайта жазалық: $Ax=b$, мұндағы

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Матрицалық түрде жазылған жүйені шешу үшін кері матрица әдісін қолданамыз. Осы әдіске сәйкес бастапқы жүйенің шешімі келесі формула бойынша анықталады: $x = A^{-1}b$, егер де A матрицасының анықтауышы (детерминанты) нөлден өзгеше болса ғана.

Мысал 2. Тендеулер жүйесін шешіңіз

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + \sqrt{3}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 4, \\ 4x_1 - 0.34x_2 + 12.345x_3 + 5.5x_4 = \frac{1}{7}, \\ -4x_1 + 3x_2 + \sqrt{2}x_3 + x_4 = 0.98, \\ \frac{1}{7}x_1 + 4x_2 + \quad \quad \quad 0.5x_4 = 0. \end{cases}$$

Mathcad жүйесіндегі осы тендеулер жүйесін шешудің мысалы 26-суретте келтірілген.

26-суретте көрсетілген бұл жүйенің шешімі жуықталған шама (берілген дәлдікке сәйкес) екенін ескеріңіз. Егер вектордың x шешім шығару кезінде теңдік белгісі символдық түрлендіру белгісімен алмастырылса, онда біз нақты шешім аламыз. Көбінесе, мұндай дәл шешімді экранға шығаруға тырысқанда, нәтиже тым үлкен болады (27-сурет).

Введем матрицу исходной системы и столбец свободных членов

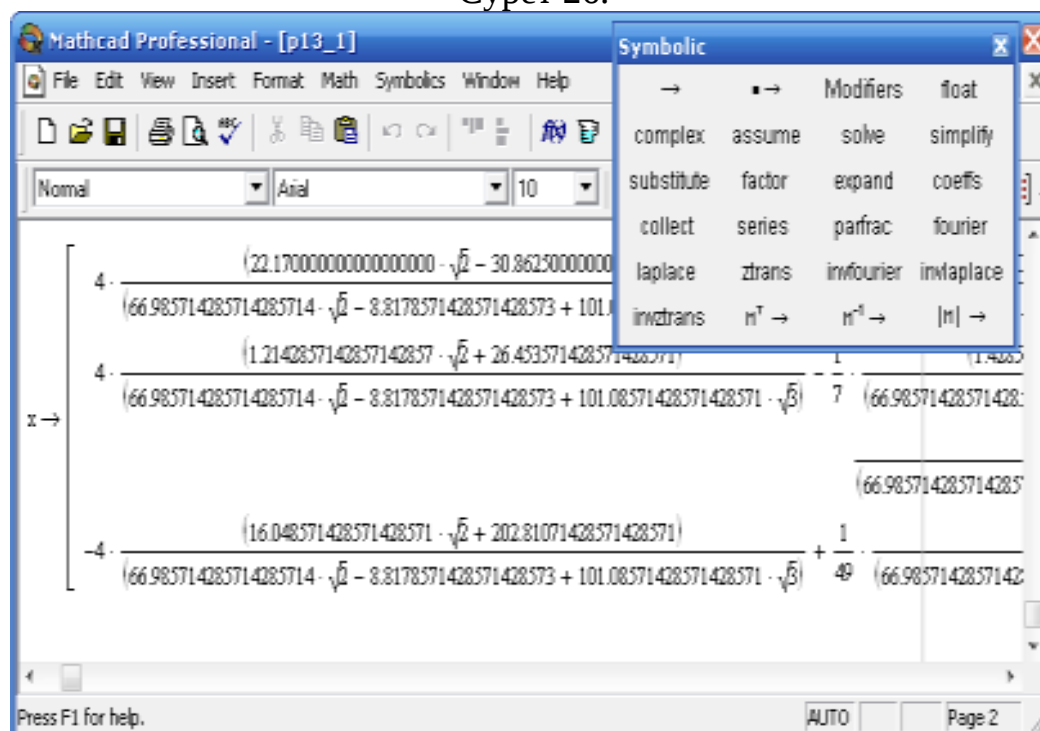
$$A := \begin{pmatrix} 3 & 7 & \sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ 4 & -0.34 & 12.345 & 5.5 \\ -4 & 3 & \sqrt{2} & 1 \\ \frac{1}{7} & 4 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{1}{7} \\ 0.98 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Проверим условие существования решения $|A| = -261$

Найдем вектор неизвестных $x := A^{-1}b$

Выведем на экран полученное решение $x = \begin{pmatrix} -0.203 \\ 0.487 \\ 1.8 \\ -3.837 \end{pmatrix}$

Сурет 26.



Сурет 27.

Mathcad жүйесінде сызықтық Алгебралық жүйелер жүйесін **A** матрицасымен және **b** еркін мүшелерінің векторымен шешудің матрицалық әдісін жүзеге асыруға мүмкіндік беретін **lsolve(A,b)** функциясы бар. Бұл функцияны 2 мысал жүйесіне қолданылуы 27-суретте көрсетілген.

$$\text{lsolve}(A, b) = \begin{pmatrix} -0.203 \\ 0.487 \\ 1.8 \\ -3.837 \end{pmatrix}$$

III. Mathcad жүйесі қайталанатын қатынастар бойынша есептеулер жүргізуге мүмкіндік береді. Бұл белгілі бір функцияның мәні оның алдындағы бір немесе бірнеше мәндерде болатын қатынастар. Мұндай функциялардың қарапайым мысалы-геометриялық прогрессия, оның әр мүшесі осы прогрессияның деноминаторына көбейтілген

алдыңғы терминмен анықталады. Тағы бір мысал – Фибоначчи сандары, олар келесідей анықталады: алғашқы екі сан 1-ге тең, ал әрбір келесі-алдыңғы екеуінің қосындысы.

Қайталанатын есептеулерді жүзеге асырудың мысалын қарастыралық.

Мысал 3. Фибоначчидің алғашқы 15 санын және осы 15 санның квадраттарының қосындысын табыңыз.

Біз x векторы түрінде Фибоначчи сандарының тізбегін құрамыз, оның әр координаты сәйкес нөмірі бар Фибоначчи саны болып табылады. Алғашқы екі санды қолмен еңгіземіз. Қалғандары сараланған айнымалы және қайталанатын формуланы қолдана отырып алынады (6.5-суретті қараңыз).

Фибоначчи сандарының квадраттарының қосындысын s векторы ретінде де қарастыруға болады, оның әрбір k -координатасы (екіншісінен бастап) салынған тізбектің алғашқы мүшелерінің k қосындысы болып табылады.

Соңғы нәтиже алу үшін x векторын және s векторының 15-ші координатасын көрсету жеткілікті, сонымен бірге қажеттілікке байланысты тең белгіні де, символдық түрлендіру белгісін де қолдануға болады. Мәселенің толық шешімі 28-суретте көрсетілген.

ORIGIN := 1	
Определим первые два числа последовательности Фибоначчи и сумму квадратов первых двух членов этой последовательности	
$x_1 := 1 \quad x_2 := 1 \quad s_2 := (x_1)^2 + (x_2)^2$	
Далее используем рекуррентные соотношения	
$i := 3..15$	
$x_i := x_{i-1} + x_{i-2} \quad s_i := s_{i-1} + (x_i)^2$	
$x =$	1
	1
	1
	2
	3
	5
	8
	13
	21
	34
	55
	89
	144
	233
	377
	610
$s_{15} \rightarrow 602070$	

Сурет 28.

Фибоначчи тізбегінің квадраттарының қажетті қосындысын басқа жолдармен табуға болатындығын ескеріңіз. Вектор модулі оның координаттарының квадраттарының қосындысының квадрат түбірі болғандықтан, екінші сұраққа жауап беру үшін x вектор модулінің квадратын көрсетуге болады. Қосындыны табудың тағы бір тәсілі – **Calculus** тақтасында орналасқан суммалау белгісін пайдалану. Алайда, соңғы жағдайда символдық түрлендіру белгісін пайдалануға жол берілмейді. Қарастырылған екі әдіс де 29-суретте көрсетілген.

$$\begin{aligned} (|x|)^2 &\rightarrow 602070 \\ \sum_{i=1}^{15} (x_i)^2 &= 6.0207 \times 10^5 \end{aligned}$$

Сурет 29.

IV. Mathcad көмегімен сызықтық емес теңдеулер жүйесін шешу жолдарын қарастырамыз.

Қарапайым теңдеулер жүйесі үшін (соның ішінде сызықтық) шешімді символдық түрде **Given-find** конструкциясын қолдана отырып алуға болады. Ол үшін Given кілт сөзін теріңіз. Содан кейін біз жүйенің теңдеулерін енгіземіз, теңдеулердің екі бөлігі де "қалың" теңдік белгісімен байланыстырылуы керек. Біз **find** функциясын тереміз және оның дәлелдерін көрсетеміз, олар бастапқы жүйенің белгісіз айнымалылары болып табылады. Біз жиынтықты символдық түрлендіру белгісімен аяқтаймыз. Нәтижесінде біз шешім матрицасын (немесе векторын) аламыз, оның бағандары бастапқы жүйенің белгісіз мәнін анықтайды және олардың реті (жоғарыдан төменге қарай) олардың табу функциясына өту тәртібіне сәйкес келеді. Егер символдық шешімнен кейін тең белгі қойылса, онда біз сандық шешім аламыз.

Мысал 4. 30-суретте сызықтық емес теңдеулер жүйесінің шешімі

қаралды:

30-суретте көрсетілгендей бастапқы жүйенің екі шешім бар: $x=0.814, y=0.814$ және $x=-1.228, y=-1.228$.

Given

$$y = x^2 + \sqrt{2}x - 1 \quad y = x$$

$$\text{find}(x, y) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (7 - 2 \cdot \sqrt{2})^{\left(\frac{1}{2}\right)} & \frac{-1}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot (7 - 2 \cdot \sqrt{2})^{\left(\frac{1}{2}\right)} \\ \frac{-1}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (7 - 2 \cdot \sqrt{2})^{\left(\frac{1}{2}\right)} & \frac{-1}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot (7 - 2 \cdot \sqrt{2})^{\left(\frac{1}{2}\right)} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0.814 & -1.228 \\ 0.814 & -1.228 \end{pmatrix}$$

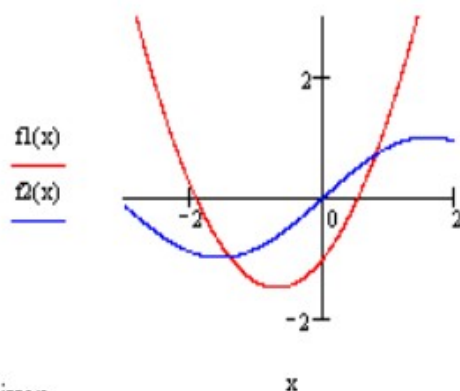
Сурет 30.

Сызықтық емес теңдеулер жүйесін символдық шешуге сақтықпен қарау керек. Теңдеулер жүйесінің аздап күрделенуімен мұндай шешім толық болмауы мүмкін (31-сурет).

31-суретте $\begin{cases} y = x^2 + \sqrt{2}x - 1 \\ y = \sin(x) \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің символдық

шешімі келтірілген. Mathcad жүйесі бір түбір шығарды, бірақ функциялардың графиктерінен екі шешім болуы керек екенін көруге болады.

$$f1(x) := x^2 + \sqrt{2}x - 1 \quad f2(x) := \sin(x)$$



Given

$$y = f1(x) \quad y = f2(x)$$

$$\text{find}(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} .77636592404403049014 \\ -.39725595198325867967 + .77636592404403049014 \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.776 \\ 0.701 \end{pmatrix}$$

Сурет 31.

Жетіспейтін шешімдерді табу үшін немесе күрделі теңдеулер жүйесі жағдайында сандық шешімді қолдануға болады. Мұндай шешімде сонымен қатар **Given-find** конструкциясын қолданады және формасы бір белгісіз сызықтық емес теңдеулердің шешіміне ұқсайды. Алдымен бастапқы жуықтау орнатылады, содан кейін жүйенің теңдеулері Given кілт сөзімен басталатын шешім блогына орналастырылады. Онда сіз қалаған шешімді қанағаттандыруы керек теңсіздіктерді көрсете аласыз (теңсіздік белгілері **Boolean** панелінен алынуы керек). Шешім блогы **find** функциясымен аяқталады, содан кейін теңдік белгісі қойылады. Нәтиже берілген дәлдікке сәйкес келетін жуық шешім векторы болады.

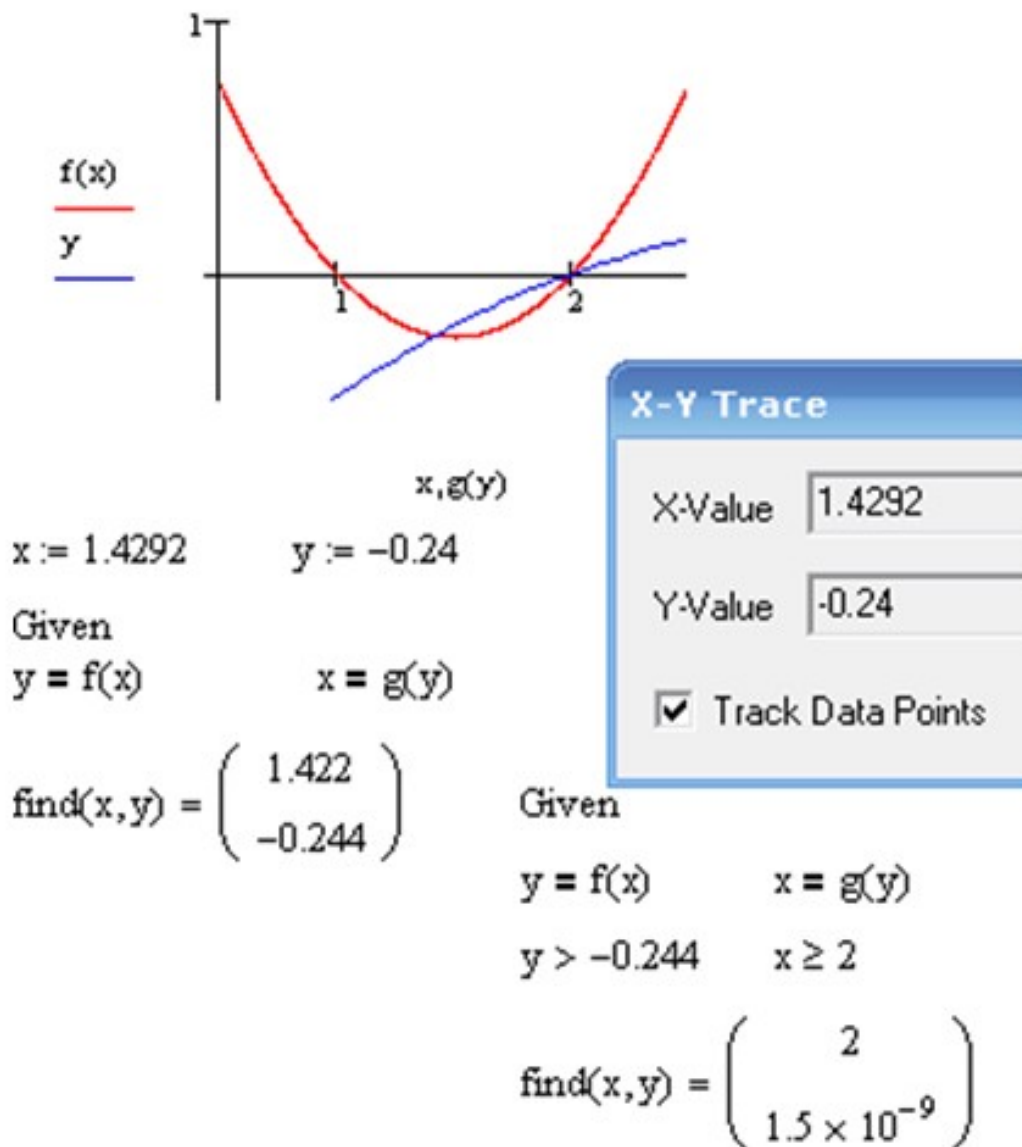
Мысал 5.
$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 - y = 0 \\ 1 - y^2 - e^{3y} - z = 0 \end{cases}$$
 сызықтық емес теңдеулер

жүйесінің шешімін табыңыз.

Бастапқы жуықтауды табу үшін біз (32-сурет) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ және $g(y) = 1 - y^2 + e^{3y}$ функциялар графигін саламыз.

Осы функциялардың өзгеруін жеткілікті үлкен анықтау аймағында зерттей отырып, біз осы функциялардың графиктерінің екі қиылысу нүктесін жақсы көретіндей етіп тарылтамыз. Трассировка көмегімен графиктердің сол жақ қиылысу нүктесінің координаттарын табамыз. Әрі қарай, **Given** шешім блогын жасау (33-сурет), табу функциясын қолдана отырып, бастапқы теңдеулер жүйесінің шешімдерінің бірін табамыз. Екінші шешімді табу үшін сіз жаңа бастапқы жуықтауды табуға болады немесе **Given** блогына қажетті шешімді бұрыннан табылғаннан бөлуге мүмкіндік беретін теңсіздіктерді қоса аласыз (33-сурет).

$$f(x) := x^2 - 3x + 2 \quad g(y) := 1 - y^2 + e^{3y}$$



Сурет 33.

Жоғарыда келтірілген тәсілмен табылған теңдеулер жүйесінің шешімдері жуықталған шама болатындығын тағы бір рет атап өтеміз. Нәтиженің дәлдігін басқару TOL жүйелік айнымалы көмегімен жүзеге асырылады.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

Келесі тапсырмаларда n – вариант нөмірі.

1. $x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ теңдеуінің түбірлерін табыңыз,

теңдеудің коэффициенттерін 6.1 кестесінен алыңыз.

кесте 6.1.

a_0	$\frac{n^2 + n}{1.5 - n} \cdot \frac{n}{3 + n} \cdot \frac{n - 6.25}{n^2 + n + 1}$
a_1	$\frac{n^2 + n}{1.5 - n} \cdot \frac{n}{3} + n + \left(-\frac{n^2 + n}{1.5 - n} - \frac{n}{3 + n} \right) \cdot \frac{n - 6.25}{n^2 + n + 1}$
a_2	$-\frac{n^2 + n}{1.5 - n} - \frac{n}{3 + n} + \frac{n - 6.25}{n^2 + n + 1}$

2. $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ теңдеуінің түбірлерін табыңыз, теңдеудің коэффициенттерін 6.2 кестесінен алыңыз.

кесте 6.1.

a_0	$6.25n^2 \cdot \frac{10^{-2}}{n + 1}$
a_1	$0.50 \cdot \frac{n}{n + 1} + 6.25 \cdot 10^{-2} \cdot \left(\frac{-1}{n} - \frac{n}{n + 1} \right) \cdot n^2$
a_2	$\frac{1}{n + 1} + 0.50 \cdot \left(\frac{-1}{n} - \frac{n}{n + 1} \right) \cdot n + 6.25 \cdot 10^{-2} \cdot n^2$
a_3	$\frac{-1}{n} - \frac{n}{n + 1} + 0.50 \cdot n$

3. Сызықтық алгебралық теңдеулердің келесі жүйелерін матрицалық әдіспен және **Isolve** функциясын қолдана отырып шешіңіз:

$$a) \begin{cases} \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}} x_1 + 0.25x_2 + x_4 = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \\ \frac{n^2}{(n+1)n} x_1 + 2x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{n}x_4 = 0, \\ 4.5x_1 + \sqrt{n}x_2 + x_3 = 0.5, \\ x_1 + \frac{5}{2}x_2 + 4x_3 + x_4 = 2; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} nx_1 - 0.2x_2 + \frac{4}{n}x_3 + x_4 = -3, \\ \frac{4}{n+1}x_1 - 3.65x_2 = 0, \\ \sqrt[3]{7}x_1 + n^2x_2 = 0.563, \\ -\sqrt{2}x_2 + 0.1nx_4 = 9. \end{cases}$$

4. Сандар тізбегі келесі заңдылықпен берілген:

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_i = \frac{n^2}{n^2 + 1} x_{i-1} - \frac{n+i}{n} x_{i-2}, i = 1, 3, \dots, 17.$$

Тізбектің барлық мүшелерін және оның қосындысын табыңыз.

5. Сандар тізбегі келесі заңдылықпен берілген:

$$x_1 = 1, x_i = \frac{x_{i-1}}{i} + \sin\left(\frac{\pi i}{n}\right), i = 2, 3, \dots, 7,$$

$$x_i = \cos\left(\frac{\pi x_{i-1}}{n}\right) + \frac{x_{i-2}}{n}, i = 8, 9, \dots, 20.$$

Тізбектің барлық мүшелерін және оның мүшелерінің текшелерінің қосындысын табыңыз.

6. Теңдеулер жүйесін символдық түрде шешіңіз:

$$\begin{cases} \sqrt{2} \frac{n}{n+1} x^2 + 0.35x + \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)} - y = 0, \\ (-1)^n 0.5\sqrt{nx} + 1.5n - y = 0. \end{cases}$$

7. Теңдеулер жүйесінің барлық шешімдерін табыңыз:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 - \frac{(-1)^n n^2 + 0.625n}{n(n+1)}, \\ y = (-1)^n 1.2nx + 0.65n + e^{0.65x}; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{n} + x\right) + 0.02n + \frac{(-1)^n}{x^2 + 1} - y = 0, \\ \cos\left(\frac{\pi}{n} + y\right) - x = 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} y^2 + (x - 0.05n)^2 = 3, \\ y - \sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{x}{n}\right) = 0. \end{cases}$$

Практикалық жұмыс 14. Математикалық талдау есептерін шешудің мысалдары

Математикалық талдаудың жиі кездесетін мәселелерін шешудің мысалдарын қысқаша қарастырайық.

Мысал 1. *Шектерді есептеу.*

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ және $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбектері берілсін, мұндағы

$$a_n = \frac{n!}{(n+1)! - n!} \text{ и } b_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2n^2}$$

Осы тізбектердің шегін есептеу үшін біз **Calculus** тақтасының төменгі жолында орналасқан шаблондарды қолданамыз (ортаңғы және оң жақ шаблондар сәйкесінше функцияның оң және сол жақ шегін есептеуге арналған).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!} \rightarrow 0 \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2n^2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Сол сияқты функцияның шегі келесі нүктеде есептеледі:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \tan(x)^2)^{\cot(x)^2} \rightarrow \exp(3)$$

немесе бір жақты шектеулер:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}} \rightarrow 0 \qquad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}} \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}} \rightarrow \text{undefined}$$

Соңғы мысалда "undefined" көрінісінің нәтижесі шек жоқ екенін көрсетеді. Егер $x=1$ нүктесіндегі бір жақты шектер бір-біріне тең емес екенін байқасаңыз, бұған оңай көз жеткізуге болады.

Мысал 2. Дифференциалдау және интегралдау.

Туынды және анықталмаған интегралдарды есептеу үшін **Calculus** панелінің тиісті шаблондарын және « $\rightarrow$ » символдық түрлендіру белгісін пайдалануға болады:

$$f(x) := \cot(x)^{x^3}$$

$$\frac{d}{dx} f(x) \rightarrow \cot(x)^{x^3} \cdot \left[3 \cdot x^2 \cdot \ln(\cot(x)) + x^3 \cdot \frac{(-1 - \cot(x)^2)}{\cot(x)} \right]$$

$$\int \frac{3x-1}{x^2-x+1} dx \rightarrow \frac{3}{2} \cdot \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \operatorname{atan}\left[\frac{1}{3} \cdot (2 \cdot x - 1) \cdot \sqrt{3}\right]$$

Анықталмаған интегралды есептеуге келетін болсақ, мұнда «→» белгісін де, әдеттегі теңдік белгісін де қолдануға болады. Соңғы жағдайда нәтиже әдетте жуықталған шама болады, ол берілген дәлдікпен анықталады (TOL айнымалысы).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin(x) + \cos(x)} dx = 0.693 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin(x) + \cos(x)} dx \rightarrow \ln(2)$$

Mathcad-та барлық интегралдарды символдық түрде есептеу мүмкін емес. Бұл мүмкін болмаған жағдайда қате туралы хабарлама беріледі.

Осы сияқты меншіксіз интегралдар да есептеледі:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \pi \quad \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx = 1.571$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} dx \rightarrow \operatorname{asin}\left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}\right) \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} dx = 0.615$$

Мысал 3. Тейлор қатарына жіктеу.

Тейлор қатарына жіктеу үшін **Symbolic** панелінің **series** командасы қолданылады. Бұл жағдайда пайда болған шаблонда жіктеу болатын айнымалы және мүшелер саны көрсетілуі керек. Төменде нөлдік және екілік айнымалыда функцияларды жіктеуінің мысалы келтірілген.

$$\sin(x) \text{ series}, x, 9 \rightarrow x - \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{120} \cdot x^5 - \frac{1}{5040} \cdot x^7$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \text{ series}, x = 2, 3 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} - \frac{1}{8} \cdot \sqrt{2} \cdot (x-2) + \frac{3}{64} \cdot \sqrt{2} \cdot (x-2)^2$$

Екінші жағдайда $x=2$ өрнегінде теңдік белгісі **Boolean** панелінен теріледі.

Мысал 4. Қосындыларды есептеу.

Mathcad шекті және шексіз қосындыларды есептеуге мүмкіндік береді.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} \rightarrow 1 \quad \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n \cdot (n+1)} \rightarrow \frac{100}{101}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{|x|}{x} \right)^n \rightarrow -\ln \left(1 - \frac{|x|}{x} \right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \rightarrow \frac{-1}{(-1+x)}$$

Тағы бір мысал ретінде кері факториалдар қатарының қосындысын

$s(m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+m)}$ есептеуді қарастырамыз, мұндағы m – натурал сан.

$$s(m) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=0}^m (n+i)} \quad s(3) \rightarrow \frac{1}{18} \quad s(10) \rightarrow \frac{1}{36288000}$$

Мысал 5. Оңтайландыру есептетерін шешу.

Максималды немесе минималды мәні бар $f(x_1, \dots, x_n)$ функциясының $x_1, \dots, x_n$ айнымалы мәндерін табу үшін **Maximize**($f, x_1, \dots, x_n$) және **Minimize**($f, x_1, \dots, x_n$) функцияларын қолдануға болады.

Бұл функцияларды пайдалану кезінде алдымен бастапқы жуықталуы орнатылады. Төменде **Given** сөзімен ашылатын шешімдер

блогы беріледі. Блоктың ішінде теңдік немесе теңсіздік түрінде әртүрлі шектеулер болуы мүмкін, олардың саны тек компьютердің жадымен шектеледі. **Minimize** функциясын қолдануға мысал келтірейік.

$$\begin{aligned} f(x,y) &:= x^4 + y^4 - 2x^2 + 4x \cdot y - 2y^2 \\ x &:= 1 \quad y := -1 \\ \text{Given} \\ t_{\min} &:= \text{Minimize}(f,x,y) \quad t_{\min} = \begin{pmatrix} 1.414 \\ -1.414 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Келесі мысал берілген үшбұрыштағы функцияның максималды мәндерін табуді көрсетеді.

$$\begin{aligned} f(x,y) &:= x^2 y \cdot (2 - x - y) \quad x := 1 \quad y := 1 \\ \text{Given} \\ x &> 0 \quad y > 0 \quad x + y - 6 \leq 0 \\ t_{\max} &:= \text{Maximize}(f,x,y) \quad t_{\max} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Сызықтық бағдарламалау мәселелерін шешу үшін **Minimize** және **Maximize** функцияларын қолдануға болады:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &:= 4x + 3y + 2z \\ x &:= 1 \quad y := 1 \quad z := 1 \\ \text{Given} \\ x &\geq 20 \quad y \geq 20 \quad z \geq 20 \\ 4x + 3.4y + 2z &\leq 340 \\ 4.75x + 11y + 2z &\leq 700 \\ x + y + z &= 100 \\ t_{\max} &:= \text{Maximize}(f,x,y,z) \quad t_{\max} = \begin{pmatrix} 56 \\ 20 \\ 24 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Соңғы мысалда бастапқы жуықтау еркін түрде алынды.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. Шектерді есептеңіз:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2 \cdot x + 5}{x^2 + 1}$$

$$3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2 \cdot \sin(x) - \cos(x) + \operatorname{ctg}(x))$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 1}} \rightarrow 1$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Практикалық жұмыс 15. Mathcad-та бағдарламалау

Mathcad-да кіріктірілген бағдарламалау тілі бар. Бұл Негізгі және Паскальға қарағанда жоғары деңгейлі тіл, ол объектіге бағытталған бағдарламалар шығаруға мүмкіндік береді. Mathcad-да бағдарламалау кезінде жергілікті айнымалылар қолданылады, олардың әрекеті тек бағдарламаға ғана емес, бүкіл құжатқа да қолданылады, оның бөлігі бағдарлама болып табылады. Бүкіл құжатта қолданылатын айнымалылар жаһандық деп аталады.

Бағдарламаларды құру үшін, ең алдымен, бағдарламалау тақтасын шақыру керек. Мұны істеу үшін математикалық панельдегі интеграция түймелері мен грек алфавитінің арасындағы көрсеткілер, тіктөртбұрыш және ромбтың суреті бар түймені басыңыз. Жаңа панель пайда болады – түймелерден тұратын бағдарламалау тақтасы:

ADD LINE батырмасы-**ЖОЛ ҚОСУ**. Оны басқан кезде екі операторды бір кіріс және бір шығыс блокқа біріктіретін тік сызық пайда болады. Қосымша операторларды біріктіру үшін түймені бірнеше рет басу керек.

;

← бұл тағайындау операторы, мысалы:

$A \leftarrow B$

Жергілікті A айнымалысына B мәні беріледі.

IF батырмасы Негізгі және Паскаль тілдеріндегі шартты ауысу операторына ұқсас, мысалы, өрнек:

$A \leftarrow B : if C > 0$

егер $C > 0$ болса, онда A айнымалысына B мәні беріледі.

OTHERWISE түймесі таңдау жасауға мүмкіндік береді (Бейсик пен Паскальдағы ELSE аналогы).

$C \leftarrow D : if A > 1$

$E \leftarrow F otherwise$

Егер $A > B$ болса, онда C айнымалысына D мәні беріледі, әйтпесе E айнымалысына F мәні беріледі.

FOR батырмасы бағдарламаға параметрмен цикл енгізеді (қанша циклды орындау керек екендігі алдын-ала белгілі болған кезде). Цикл саны бірнеше жолмен беріледі:

$FOR, i = 1, 4, 7, 8$

$FOR, i = 1 \dots 10$

$FOR, i = N$

WHILE түймесі-алғышарттары бар цикл тақырыбын құрайды. Егер біз мәселені шешу үшін қанша цикл жасау керектігін алдын-ала білмесек, мұндай цикл қолданылады.

(Ұқсас операторлар БЕЙСИКТЕ - WHILE - WEND операторы және Паскальда - WHILE - DO операторы).

Mathcad-та теріледі:

WHILE < логикалық шарт> < орындалуы керек операторлар>.

Төменде Маткададағы бағдарламалардың элементтері берілген.

Мысал 1.

X мәні берілген. Осы мәнге байланысты z 0 немесе 3 мәнін алады. x өзгерген кезде Z өзгереді.

$$x := -1$$

$$z := \begin{cases} 0 & \text{if } x > 0 \\ 3 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$z = 3$$

Мысал 2.

x мәні берілген. y мәні әлі де x-ге байланысты, бірақ мұнда үш нұсқа бар.

$$x := 11$$

$$y := \begin{cases} x & \text{if } x < 0 \\ x^2 & \text{if } 0 < x < 10 \\ e^x & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$y = 5.987 \cdot 10^4$$

Мысал 3.

Алғашқы он натурал сандардың қосындысын табу сұралады. Бастамас бұрын s сомасына нөлдік мән беру керек. Циклдардың саны белгілі болғандықтан, біз FOR операторын қолданамыз.

$$s = \begin{cases} s \leftarrow 0 \\ \text{for } x \in 1..10 \\ \quad s \leftarrow s + x \end{cases}$$

$$s = 55$$

Мысал 4.

Сумма x мәніне байланысты жасалады.

$$s \equiv \left| \begin{array}{l} s \leftarrow 0 \\ \text{for } x \in 1..10 \\ \quad s \leftarrow s + x \text{ if } x < 5 \\ \quad s \leftarrow s + \sin(x) \text{ if } 5 < x < 8 \\ \quad s \leftarrow s + \cos(x) \text{ otherwise} \end{array} \right|$$

$$s = 9.161$$

Мысал 5.

WHILE мәлімдемесін қолдану. Табиғи жолды сумма 30 санынан асқанша қорытындылау керек. Мұнда ADD LINE екі желісі қолданылады. Алдымен S және x бастапқы мәндері орнатылады, содан кейін уақыт операторы жазылады, ал екінші циклде жинақтаудың өзі жазылады. Төменгі S әрпі операцияның қай айнымалы бойынша жасалатынын көрсетеді.

Есептеу тәртібі келесідей:

1. S және x бастапқы мәндері орнатылады.
2. Шарттарды тексеру жүзеге асырылады. Ол орындалатындықтан, $s = s + x = 0 + 1$ операциясы жасалады.

3. $S < 30$ шарты тексеріледі

4. S есептеу жүргізіледі.

Және одан әрі қарай. Яғни, тексеру есептеуден бұрын жасалады. Сондықтан нәтиже көрсетілгеннен асып түседі. Содан кейін тексеру есептеуден бұрын жүргізілді

$s < 30$ болды, ал есептеуден кейін келесі x-де $s > 30$ болды.

WHILE операторы келесі циклге дейін ($s \leq 30$) жағдайды тексереді.

$$s := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow 0 \\ x \leftarrow 1 \\ \text{while } s < 30 \\ \quad \left| \begin{array}{l} s \leftarrow s + x \\ x \leftarrow x + 1 \end{array} \right. \\ \quad s \end{array} \right|$$

$$s = 36$$

ORIGIN :=1 санау 0 емес, 1-ден басталады дегенді білдіреді.

Берілген мысалды шешкеннен кейін s шекті мәнін 15,20, 50-ге өзгертіңіз.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. 25 натурал сандардың қосындысын табыңыз: $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 25$

2. Сандық қатардың 25 мүшесінің қосындысын табыңыз: $S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \dots$

Ескертпе. Мұнда қатардың әрбір келесі мүшесі "-2" - ге көбейтілген алдыңғыға тең. $U_{n+1} = -2U_n$.

2. Қатардың 25 мүшесін қорытындылау:

$$S = (3+4)/2 + (6+3)/4 + (12+2)/6 + (24+1)/8 + \dots$$

Ескертпе. Мұнда қатардың жалпы мүшесін $(a+b)/c$ түрінде ұсыну керек және әр компоненттің өзгеру заңдылықтарын анықтау керек.

4. Өздеріңіз білетіндей, Үнді иесі шахматты ойлап табушымен келесідей төлем жасады: шахмат алаңының бірінші торына бір дән, екінші торға – екі, үшінші торға – төрт (2²), төртінші торға – сегіз (2³) және т.б. соңғы, 64 ұяшыққа 2⁶³ дән салынды. Егер бір дәннің

массасы $m = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ салмағы 0,3г болса, шахмат өнертапқышы қанша астық

алды?

Жоғарыда аталған барлық тапсырмалар жауапта скаляр болды. Маткад жауапты Вектор және матрица түрінде алуға мүмкіндік береді. 5-тапсырмада жауаптар Вектор түрінде алынады.

5. Төмендегі V векторын сандармен толтырудың циклдік бағдарламасын жасаңыз: а) $v = (1, 2, 3)$, В) $v = (3, 2, 1)$, с) $v = (1, 4, 9)$. Төменде A нұсқасының шешімі берілген.

```

vektor :=
|
|  v ←  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 
|
|  for i ∈ 1..3
|
|    vi ← i
|
|  vektor ←  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ 
|
|  vektor

```

Мұнда Ғаламдық және жергілікті айнымалылар арасында айырмашылық бар. Mathcad бағдарламасы, әдетте, айнымалылары Ғаламдық деп аталатын үлкен тапсырманың бөлігі болып табылады. Бағдарлама ішіндегі айнымалылар Жергілікті деп аталады. Кейде олар сәйкес келуі мүмкін. Бұл тапсырмада ВЕКТОР Ғаламдық, ал V, I – жергілікті айнымалылар. Бағдарлама олардың арасындағы байланысты көрсетеді. V векторының бастапқы мәні анықталады. VECTOR сөзі бағдарламаның төменгі жағында есептеу қай айнымалы бойынша жүретінін анықтайды.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Жангисина Г.Д. Теория и методика компьютерного моделирования для задач базы данных и глобальной сети [Текст]: учеб. пособие / Г.Д. Жангисина, Т.Х. Хакимова. - Алматы: Издательство "NURPRESS", 2018. – 110 с. Республиканская межвузовская электронная библиотека (РМЭБ). Ссылка: <http://rmebrk.kz/epub/>

2. Ефимова И.Ю. Компьютерное моделирование: учебное пособие / И.Ю. Ефимова, И.Н. Мовчан, Л.А. Савельева.-2-е изд.-Москва: ФЛИНТА, 2017. - 70 с. - ISBN 978-5-9765-3788-0. - Текст: электронный // Лань: электроннобиблиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/>

3. Компьютерное моделирование [Текст] : учеб. пособие для студ. вузов и магистрантов / сост. А. Н. Кушеккалиев, И. М. Бапиев. - Уральск: ЗКАТУ им. Жангир хана, 2012. - 83 с. Электронная библиотека. Ссылка: <http://library.wkau.kz/index.php/ru/elektronnaya-biblioteka/> Пароль: 0000

4. Ефимова И.Ю. Компьютерное моделирование : учебное пособие / И.Ю. Ефимова, Т.Н. Варфоломеева. - 3-е изд., стер. - Москва: ФЛИНТА, 2019.-67 с. - ISBN 978-5-9765-2039-4.- Текст : электронный // Лань: электроннобиблиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/>

5. Байтенова Л.М. Лабораторный практикум по курсу "Компью-

терное моделирование" для экономических и инженерных специальностей [Текст]: учеб. пособие для студ. экон. вузов/ Л.М. Байтенова, Г.М. Исамбаева, Г.К. Сагитова. - Алматы: Экономика, 2011. - 86 с. Республиканская межвузовская электронная библиотека (РМЭБ). Ссылка: <http://rmebrk.kz/epub/>

6. Камалова Г.А. Учебное пособие по дисциплине "Исследование операций и теория игр" " [Электронный ресурс] / сост. Г.А. Камалова. - Электрон. дан. - Уральск: ЗКАТУ, 2013. Электронная библиотека. Ссылка:<http://library.wkau.kz/index.php/ru/elektronnaya-biblioteka/>
Пароль: 0000 Қосымша әдебиет:

7. Стефанова И.А. Обработка данных и компьютерное моделирование: учебное пособие / И.А. Стефанова. - Санкт-Петербург: Лань, 2020. - 112 с. - ISBN 978-5-8114-4010-8. - Текст: электронный // Лань: электроннобиблиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/>

8. Учебное пособие "Компьютерное моделирование"
[Электронный ресурс]/сост. А.Н.Кушеккалиев. - Электрон. дан.- Уральск: ЗКАТУ, 2012. - эл. опт. Диск (CD-DA). - Электронная библиотека. Ссылка:<http://library.wkau.kz/index.php/ru/elektronnaya-biblioteka/>
Пароль: 0000

9. Королев А.Л. Компьютерное моделирование. Лабораторный практикум [Текст] / А.Л. Королев. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. - 296 с.

10. Назарова О. Б. Моделирование бизнес-процессов : учебник / О.Б. Назарова, О.Е. Масленникова. - 2-е изд. - Москва: ФЛИНТА, 2017. -261 с. - ISBN 978-5-9765-3700-2. - Текст: электронный//Лань: электроннобиблиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/>.

11. А.А. Мицель. Математическое и имитационное моделирование в MATHCAD. Лабораторный практикум./М.Ю. Катаев.- Юрга – 2016.

Вахитова Айзада Хабержановна
аға оқытушы

Гумарова Айнура Агедиловна
техника ғылымдарының магистрі, оқытушы

КОМПЬЮТЕРЛІК МОДЕЛЬДЕУ

Оқу құралы

20.01.2022 ж. басуға қол қойылды
Пішімі 60x84^{1/16} Офсетті қағаз 80 м/г
Көлемі 8,1 б.т. Тапсырыс №36
Таралымы 500 дана

**Дайын түпнұсқасының сапасына
толық сәйкестікте басылды**
«Жәңгір хан атындағы Батыс Қазақстан
аграрлық-техникалық университеті» КеАҚ
090009, Орал қ., Жәңгір хан көшесі, 51